Math. P.
540 scf

Math. P. Steck
540 scf

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Latein- und Realschulen

von

F. X. Steck und Dr. J. Bielmayr.

Neunte verbesserte Auflage.

Kempten.
Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.
1886.

Durch hohen Ministerial-Erlaß in das Verzeichnis der gebilligten Lehrbücher aufgenommen.

Lehrbuch
der
Arithmetik
für
Latein- und Realschulen
von
F. X. Steck und Dr. J. Bielmayr.

Neunte verbesserte Auflage.

Kempten.
Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung.
1886.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Auch diesmal haben wir, den Wünschen der geehrten Herren Collegen entsprechend, jede wesentliche Änderung unterlassen und uns auf sorgfältige Durchsicht beschränkt.

Die Verfasser.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Bei der Herstellung des Buches war es unsere Absicht, auf wenigen Bogen sowohl die Regeln als auch eine der Fassungskraft der Schüler entsprechende Begründung derselben den Letzteren in die Hand zu geben, welche beide vorgetragen werden müssen, wenn dem von der höchsten Stelle aufgestellten Lehrplane entsprechend der Unterricht in der gemeinen Arithmetik sowohl geistig bildend, als für den Schüler anziehend sein soll, was ganz gewiß nur dann der Fall ist, wenn derselbe auf das Verständnis gegründet ist. Daß die Begründung der Regeln manchmal ausführlicher, manchmal mehr andeutungsweise gegeben wurde, wird man uns kaum zum Vorwurfe machen, da durch weitere Ausführung aller Begründungen der Umfang des Buches ohne entsprechenden Nutzen vergrößert worden wäre, während es dem Schüler leicht werden muß, nicht nur einzusehen, daß ein folgender Satz auf gleiche Weise wie ein vorausgehender ähnlicher begründet werden kann, sondern auch aus den gegebenen Andeutungen bei geeigneter Nachhilfe des Lehrers diese Begründung selbst auszuführen.

Durch die Herausgabe unserer Arbeit hoffen wir auch unseren Collegen einen Dienst zu erweisen, und empfehlen ihnen dieselbe mit der freundlichen Bitte, uns ihre Bemerkungen über das Buch gefälligst mitzuteilen, um bei einer etwaigen neuen Auflage gebührende Berücksichtigung zu finden. Ebenso glauben wir, daß unser Buch beim Unterrichte in Realschulen mit gutem Erfolge benützt werden kann. Aus diesem Grunde ersuchen wir auch die betreffenden Lehrer an diesen Anstalten um gefällige Mitteilung ihrer Ansicht über unsere Arbeit.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort III
Aus dem Vorworte zur ersten Auflage IV
Einleitung 1

Erste Abteilung. Das Rechnen mit unbenannten Zahlen.

1. Numerieren 1
2. Addieren unbenannter Zahlen 4
3. Subtrahieren unbenannter Zahlen 5
4. Multiplizieren unbenannter Zahlen 9
5. Dividieren unbenannter Zahlen 13
6. Rechnungsvorteile bei der Multiplikation und Division . 19

Zweite Abteilung. Das Rechnen mit benannten Zahlen.

A. Gleichbenannte Zahlen 25
B. Ungleichbenannte Zahlen
1. Erklärungen 26
2. Reduzieren 27
3. Addieren und Subtrahieren 30
4. Zeitrechnungen durch Addition und Subtraktion . . 31
5. Multiplizieren 32
6. Dividieren 33
7. Berechnungen von Flächen und Körpern 34

Dritte Abteilung. Von der Teilbarkeit der Zahlen.

1. Erklärungen 38
2. Sätze über die Teilbarkeit 39
3. Kennzeichen der Teilbarkeit u. Aufsuchen der Teiler einer Zahl 39
4. Zerlegen einer Zahl in ihre einfachen und zusammengesetzten Teiler 42
5. Größtes gemeinschaftliches Maß 43
6. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches 45

Seite

Vierte Abteilung. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

1. Allgemeine Eigenschaften der Brüche 48
2. Erweitern und Kürzen der Brüche 51
3. Addieren und Subtrahieren der Brüche . . . 52
4. Multiplizieren und Dividieren der Brüche . . . 54

Fünfte Abteilung. Das Rechnen mit Decimalbrüchen.

1. Erklärungen 57
2. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche . 59
3. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche . . 62
4. Multiplikation der Decimalbrüche 63
5. Division der Decimalbrüche 64
6. Verwandlung der unendlichen Decimalbrüche in gemeine Brüche 66
7. Abgekürztes Rechnen mit Decimalbrüchen
   A. Erklärung 68
   B. Addition und Subtraktion 69
   C. Multiplikation 69
   D. Division 72

Sechste Abteilung. Schlußrechnung.

1. Einfache Regeldetri 75
2. Lösung der Regeldetri-Aufgaben durch Schlüsse . . 77
3. Zusammengesetzte Regeldetri 78

Siebente Abteilung.

A. Von den Proportionen 80
B. Anwendung der Proportionslehre auf Regeldetri-Aufgaben.
1. Einfache Regeldetri-Aufgaben 87
2. Maßreduktionen 88
3. Lösung zusammengesetzter Regeldetriaufgaben durch Proportionen 90
4. Kettenregel 92
5. Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung . . . 94
6. Vermischungs- oder Alligations-Rechnung . . . 97

Achte Abteilung.

Kettenbrüche 105

Anhang

über die Maße, Gewichte und Münzen des metrischen Systems.

1. Grundlage 115
2. Das Längenmaß 115
3. Das Flächenmaß 116
4. Das Körpermaß 116
5. Das Hohlmaß für flüssige und trockene Gegenstände . 116
6. Das Gewicht 117
7. Die Münzen 117

Seite

Verhältniszahlen.

1. Längenmaße 117
2. Flächenmaße 118
3. Körpermaße 118
4. Getränkmaße 118
5. Getreidemaße 118
6. Handelsgewicht 118
7. Apothekergewicht 119
8. Silbergewicht 119
9. Goldgewicht 119
10. Perlen- und Juwelengewicht 119

Einleitung.

§ 1.

Gegenstände, welche in gewissen Merkmalen übereinstimmen, heißen in Beziehung auf diese Merkmale gleichartig.

Um die Größe eines Dinges darzustellen, kann man angeben, wie oft ein anderes gleichartiges Ding, welches Einheit genannt wird, genommen werden muß, um das gegebene Ding zu erhalten. Diese Operation heißt Messen und das Resultat dieser Messung Zahl. Die Zahl drückt also eine Menge von Einheiten aus. Wird bei einer Zahl bloß auf die Menge der Einheiten, nicht aber auf die Art derselben Rücksicht genommen, so heißt sie eine unbenannte Zahl; wird aber auch die Art der Einheiten angegeben, so heißt die Zahl eine benannte Zahl (Größe).

Die Verbindung von Zahlen, um daraus andere unbekannte Zahlen abzuleiten, heißt Rechnen; die Lehre davon Arithmetik.

Erste Abteilung.

Das Rechnen mit unbenannten Zahlen.

1. Das Numerieren.

§ 2.

Um die Zahlen auszudrücken, sind Wörter oder Zeichen notwendig. Die Wörter nennt man Zahlwörter, die Zeichen heißen Zahlzeichen oder Ziffern.

Der Unterschied zwischen Zahlen und Zahlzeichen (Ziffern) ist wohl zu beobachten, wenn auch häufig, der Kürze wegen, das Wort „Ziffer" (Zifferstelle) statt „durch die Ziffer bezeichnete Zahl" gebraucht wird.

Es ergibt sich zunächst die doppelte Aufgabe:

a) jede in Ziffern gegebene Zahl auszusprechen, und

b) jede ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.

Diese doppelte Verrichtung heißt Numerieren.

Man hat bloß neun Ziffern, welche ihre Bedeutung dadurch erhalten, daß die erste die Einheit, jede folgende aber immer die um eins größere Zahl bezeichnet. Diese neun auf einander folgenden Ziffern sind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9.
eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun.

Zu diesen Ziffern kommt noch als weiteres Zeichen die 0 (Null), welche keine Menge von Einheiten bezeichnet, sondern nur durch die Art unsers Anschreibens der Zahlen gefordert wird und anzeigt, daß an der Stelle, an welcher sie steht, keine geltende Ziffer ist.

Es sind unendlich viele verschiedene Zahlen denkbar; damit aber alle denkbaren Zahlen mit den obigen zehn Zeichen geschrieben werden können, ist folgende Anordnung gemacht worden:

1) Zehn Einheiten einer Ordnung bilden immer eine Einheit der nächst höheren Ordnung. Die Einheiten der niedrigsten Ordnung heißen Einer, zehn Einer geben einen Zehner, zehn Zehner geben einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, zehn Zehntausender einen Hunderttausender, zehn Hunderttausender eine Million u. s. f.

2) Die verschiedenen Ordnungen werden beim Schreiben dadurch angezeigt, daß man jede Ziffer, welche Einheiten der nächst höheren Ordnung ausdrücken soll, um eine Stelle von rechts nach links vorrückt, so daß, wenn mehrere Ziffern nebeneinander stehen, die Ziffer an der ersten Stelle, von rechts gezählt, die Einer, jene an der zweiten Stelle die Zehner, die an der dritten Stelle die Hunderter u. s. f. bedeutet.

Es hat also jede Ziffer einen doppelten Wert, nämlich denjenigen Wert, wodurch die Menge der Einheiten ausgedrückt ist, welcher Nominal- oder Nennwert heißt, und denjenigen Wert, welcher der betreffenden Einheit vermöge der Stelle, an welcher sie steht, zukommt; dieser wird Lokal- oder Stellenwert genannt.

Diese Art, alle denkbaren Zahlen durch obige zehn Ziffern darzustellen, heißt das Zehnersystem oder das dekadische Zahlensystem (Decimalsystem).

Eine Zahl dekadisch anschreiben, heißt, jede einzelne Ziffer derselben ihrem Stellenwerte gemäß anschreiben.

Die nach 2) erhaltenen Zahlen-Verbindungen lassen sich in Klassen von je drei Stellen von rechts nach links einteilen, so daß

sich stets dieselben Wörter, Einer, Zehner, Hunderter, nur jede Klasse mit einem anderen Beinamen wiederholen. Die niedrigste Klasse enthält die Einer, Zehner und Hunderter der niedrigsten Ordnung, die nächste die Einer, Zehner und Hunderter von den Tausendern, die folgende die Einer, Zehner und Hunderter von den Millionen u. s. f.

Beim Aussprechen geschriebener Zahlen beobachte man Folgendes:

1) Hat die Zahl nur zwei Ziffern, so spricht man zuerst die Einheiten und dann die Zehner. Steht an der Stelle rechts 0, so wird diese nicht ausgesprochen.

2) Hat die Zahl bloß drei Ziffern, so spricht man zuerst die Hunderter, dann die Einer und zuletzt die Zehner. Steht an einer Stelle 0, so wird diese nicht gesprochen.

3) Jede Zahl mit mehr als drei Ziffern wird zuerst von rechts nach links in Klassen von je drei Stellen eingeteilt. Nach der ersten, dritten, fünften Klasse u. s. f. mache man oben einen Punkt, nach der zweiten Klasse oben ein Komma, nach der vierten oben zwei Kommata, nach der sechsten oben drei Kommata u. s. f. Sodann lese man, von links angefangen, jede Klasse für sich und setze, wenn ein Punkt folgt, Tausend, wenn ein Komma folgt, Million(en), wenn zwei Kommata folgen, Billion(en) u. s. f. dazu.*)

Beim Anschreiben der Zahlen ist Folgendes zu merken:

1) Ist die Zahl kleiner als Tausend, so schreibe man die Hunderter an die dritte, die Zehner an die zweite und die Einer an die erste Stelle von rechts. Jede Stelle, an welche keine Ziffer zu stehen kommt, wird, wenn noch eine höhere Stelle vorkommt, durch eine Null ausgefüllt.

2) Ist die Zahl größer als Tausend, so schreibe man diejenige Zahl zuerst, nach welcher das erstemal Tausend, Million oder Billion u. s. f. gesprochen wurde. Dabei ist zu beobachten, daß nach Tausend noch eine Klasse, also drei Stellen, nach Million noch zwei Klassen, also sechs Stellen u. s. f. folgen.

Die obengenannten Ziffern heißen a r a b i s c h e (richtiger indische). Die Römer gebrauchten statt derselben einige Buchstaben ihres Alphabetes. Es ließen sich noch sehr viele andere Zahlensysteme bilden, die aber meist weitläufiger wären, als das soeben besprochene dekadische System.

A n m e r k u n g: Ein oder mehrere Zeichen, welche eine Zahl bedeuten, nennt man einen A u s d r u c k.

---

*) Ist die Zahl noch nicht angeschrieben, so kann man die Punkte und

2. Addieren unbenannter Zahlen.

§ 3.

1) Addieren heißt aus zwei oder mehreren Zahlen eine neue bilden, welche so viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden, die gesuchte Zahl nennt man Summe. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), welches plus (mehr) gelesen wird.

2) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Zeichen plus, so hat man eine Summe, z. B. 4 + 6 ist eine Summe, deren Wert 10 ist, welcher mit der Summe 4 + 6 durch das Gleichheitszeichen (=) verbunden werden kann, also

4 + 6 = 10; d. h. vier plus sechs ist gleich zehn.

3) In jeder Summe darf man die Summanden vertauschen, z. B. 5 + 7 = 7 + 5; denn es ist gleichgiltig, ob man zu 5 die Zahl 7 oder zu 7 die Zahl 5 addiert, die Menge der Einheiten ist in beiden Fällen dieselbe.

4) Will man anzeigen, daß eine Summe (oder irgend ein zusammengesetzter Ausdruck) mit andern Ausdrücken verbunden werden soll, so schließt man sie in Klammern.

Anmerkung. 1) Zwischen der Summe und ihrem Werte ist wohl zu unterscheiden.

2) Werden zwei gleiche Ausdrücke (welche dieselbe Zahl bedeuten) durch das Gleichheitszeichen verbunden, so erhält man eine Gleichung.

§ 4.

Sollen mehrzifferige Zahlen addiert werden, so kann das nur dadurch geschehen, daß man die Zifferstellen (§ 2) von gleichem Stellenwerte (gleichnamige oder gleichartige Zifferstellen) d. h. Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern u. s. f. addiert. Hat man also z. B. 4283 + 2662, so erhält man, wenn die gleichnamigen Zifferstellen unter einander geschrieben werden, folgende Darstellung:

$$\begin{array}{r} 4283 \\ 2662 \\ \hline 6945. \end{array}$$

2 Einer und 3 Einer geben 5 Einer, also ist 5 wieder an die Stelle der Einer zu setzen; 6 Zehner und 8 Zehner sind 14 Zehner, 14 Zehner geben aber 1 Hunderter und 4 Zehner, die 4

Kommata dadurch entbehrlich machen, daß man die oben erwähnten Klassen von je drei Stellen durch kleine Zwischenräume trennt.
Z. B. 3''''141·592'''653·589''793·238'462·643 = 3 141 592 653 589 793 238 462 643.

Zehner kommen unter die Zehner, 1 Hundert aber wird zu den Hunderten gezählt, demnach hat man: 1 Hundert, 6 Hundert und 2 Hundert, diese geben 9 Hundert, mithin schreibt man 9 unter die addierten Ziffernstellen; endlich 2 Tausend und 4 Tausend sind 6 Tausend, also wird 6 unter die Tausender geschrieben.

Ebenso verfährt man bei der Addition mehrerer Zahlen; z. B. 47048 + 3999 + 984582 gibt:

$$\begin{array}{r} 47048 \\ 3999 \\ 984582 \\ \hline 1035629. \end{array}$$

Es folgt hieraus für die Addition mehrzifferiger Zahlen folgende Regel:

Man addiert nacheinander die gleichnamigen Zifferstellen, indem man mit den Einern beginnt. Erhält man hiebei eine zwei- oder mehrzifferige Zahl als Summe, so bekommen ihre Einer den Lokalwert der addierten Stellen, die Zehner aber zählt man zur nächst höheren Stelle.

3. Subtrahieren unbenannter Zahlen.

§ 5.

1) Subtrahieren heißt von einer gegebenen Zahl so viele Einheiten wegnehmen, als deren eine andere gegebene Zahl enthält. Die Zahl, von welcher hinweggenommen wird, heißt Minuend, die Zahl, welche hinweggenommen wird, Subtrahend, die gesuchte Zahl aber Rest, Unterschied oder Differenz.

Das Zeichen der Subtraktion ist ein horizontaler Strich (—) und wird minus (weniger) gelesen.

2) Obiger Erklärung zufolge ist die Differenz jene Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der Minuend mehr hat als der Subtrahend. Es läßt sich also der Minuend als eine Summe betrachten, deren einer Summand der Subtrahend, deren anderer Summand die Differenz ist. Daraus folgt eine zweite Erklärung vom Subtrahieren, nämlich: Subtrahieren heißt aus einer Summe und einem Summanden derselben den andern Summanden finden.

3) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Zeichen —, so hat

man eine Differenz, z. B. 8 — 6 ist eine Differenz, deren Wert 2 ist, so daß man also hat 8 — 6 = 2.

4) Aus der zweiten Erklärung folgt: die Differenz zum Subtrahenden addiert, muß den Minuenden geben; denn der Minuend ist die gegebene Summe, der Subtrahend der gegebene Summand, und die Differenz der gesuchte Summand.

5) Der Wert einer Differenz bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl zum Minuenden und Subtrahenden addiert oder davon subtrahiert; denn es bleibt dadurch der Unterschied, folglich (nach 2) die Differenz dieselbe.

6) Jede Differenz, deren Subtrahend dem Minuenden gleich ist, wird durch 0 bezeichnet.

§ 6.

1) Beim Subtrahieren einer mehrzifferigen Zahl hat man auf dieselbe Art zu verfahren wie beim Addieren, man muß auch hier die gleichnamigen Zifferstellen (§ 2) subtrahieren. Z. B. 5968—4783.

59'68
47 83
―――――
11 85.

3 Einer von 8 Einern bleiben 5 Einer; 8 Zehner lassen sich von 6 Zehnern nicht subtrahieren, deshalb nimmt man von den Hunderten des Minuenden einen weg, was gewöhnlich durch einen Strich angezeigt wird, verwandelt diesen in 10 Zehner und addiert dazu die schon vorhandenen 6 Zehner des Minuenden, 10 und 6 sind 16 Zehner, 8 von 16 bleiben 8 Zehner; 7 Hundert von 8 Hundert bleibt 1 Hundert; endlich 4 Tausend von 5 Tausend bleibt 1 Tausend. Daraus ergibt sich für die Subtraktion mehrzifferiger Zahlen folgende Regel:

Man subtrahiere die gleichartigen Zifferstellen, indem man bei der niedrigsten Stelle beginnt. Ist eine Stelle des Minuenden kleiner als die entsprechende des Subtrahenden, so nehme man von der nächst höheren Stelle des Minuenden eine Einheit, welche zehn Einheiten der zu subtrahierenden Ordnung gibt, und addiere dazu die schon vorhandenen Einheiten, so daß von der Summe subtrahiert werden kann. Dieses Letztere, wenn nämlich eine Stelle des Minuenden kleiner ist als die entsprechende des Subtrahenden, läßt sich dahin abändern, daß man zehn Einheiten zur Stelle des Minuenden und eine Einheit zu der nächst höheren Ordnung des

Subtrahenden addiert, wodurch (nach § 5, 5) die Differenz nicht geändert wird. Z. B. 94376 — 23592.

94376	2 von 6 bleiben 4
23592	9 „ 17 „ 8
70784	6 (statt 5) von 13 bleiben 7
	4 (statt 3) „ 4 bleibt 0
	2 „ 9 bleiben 7.

2) Nach § 5, 2) läßt sich die Subtraktion in eine Addition verwandeln, wenn man sucht, was zum Subtrahenden addiert werden muß, um den Minuenden zu erhalten: z. B. 4985 — 3294.

$$\begin{array}{r} 4985 \\ 3294 \\ \hline 1691 \end{array}$$

Zu 4 braucht man 1, damit man 5 erhalte, also 4 und 1 gibt 5; 9 und 9 sind 18 Zehner, d. i. 8 Zehner und 1 Hunderter, 1 und 2 gibt 3 und 6 gibt 9; 3 und 1 gibt 4.

§ 7.

1) Aus der Erklärung (§ 5, 2), daß der Minuend die Summe aus dem Subtrahenden und der Differenz ist, folgt die *Probe der Subtraktion*: Addiert man zum Subtrahenden die Differenz, so muß man, wenn richtig gerechnet wurde, den Minuenden erhalten.

2) Aus der zweiten Erklärung vom Subtrahieren, nämlich aus einer Summe und einem Summanden den andern finden, erhält man die *Probe der Addition*: Subtrahiert man von der Summe einen Summanden, so erhält man den andern. Ist aber die Summe durch Addition mehrerer Summanden entstanden, so addiere man alle diese Summanden mit Ausnahme eines beliebigen, und subtrahiere die neu erhaltene Summe von der ersten, so muß der ausgelassene Summand erhalten werden.

§ 8.

Sind mehrere Ausdrücke teils durch Addition, teils durch Subtraktion mit einander verbunden, so heißt der dadurch erhaltene Ausdruck *Aggregat* (algebraische Summe, Polynom); die durch + oder — verbundenen Ausdrücke heißen *Glieder* des Aggregates und zwar diejenigen, vor denen + oder kein Zeichen steht, *positive* (additive), diejenigen, vor denen — steht, *negative* (subtraktive) Glieder.

Z. B. 18 — 6 + 15 — 19, heißt ein Aggregat,
18*) und 15 heißen die positiven Glieder desselben,
6 und 19 „ „ negativen „ „

Anmerkung: Zwei auf die erwähnte Weise verbundene Ausdrücke (Summe, Differenz) nennt man auch ein Binom, drei ein Trinom.

Es soll in obigem Beispiele von 18 zuerst 6 subtrahiert, zu der erhaltenen Differenz 15 addiert und dann von der Summe 19 subtrahiert werden; dieses wird aber auch dadurch erreicht, daß man 18 und 15 addiert und dann, anstatt 6 und später 19 zu subtrahieren, gleich die Summe aus 6 und 19 subtrahiert, so daß man hat: 18 — 6 + 15 — 19 = (18 + 15) — (6 + 19) = 33 — 25 = 8, d. h. die Glieder eines Aggregates können dadurch verbunden werden, daß man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen subtrahiert.

Z. B. 22 — 7 — 8 + 9 + 35 — 16 — 24 + 12 = (22 + 9 + 35 + 12) — (7 + 8 + 16 + 24) = 78 — 55 = 23.

Anmerkung: Dieses Verfahren muß dann angewendet werden, wenn bei der Verbindung der Fall vorkommt, daß ein Subtrahend größer ist als das Resultat der vorausgehenden Glieder.

Z. B. 10 — 6 — 7 + 5 = (10 + 5) — (6 + 7) = 15 — 13 = 2.

§ 9.

Bei manchen Aufgaben können Rechnungs-Abkürzungen gemacht werden.

1) In der Aufgabe: 48907 — (22029 + 14523) = 12355 ist es nicht notwendig, zuerst die Summe innerhalb der Klammern vollständig auszurechnen, sondern man kann zwei Stellen addieren und sogleich ihre Summe subtrahieren, wie folgt: 3 und 9 sind 12, 1 Zehner und 2 Einer, 2 von 7 bleiben 5; 1 und 2 sind 3 und 2 sind 5; 5 von 10 bleiben 5; 1 und 5 sind 6; 6 von 9 bleiben 3; 4 und 2 sind 6; 6 von 8 bleiben 2; 1 und 2 sind 3; 3 von 4 bleibt 1.

Anmerkung: Selbstverständlich kann man hier auch § 6, 2 berücksichtigen.

2) In der Aufgabe 46782 + 99999 addiere man statt 99999 die Zahl 100000, und subtrahiere von der erhaltenen Summe 1, dann hat man: (46782 + 100000) — 1 = 146781.

3) In der Aufgabe 217 — 99 + 999, sowie in der Aufgabe 816 — 98 + 991 — 2 + 9 — 90 kann man die bequem zusammenzufassenden Zahlen (999 — 99; — 98 — 2; 991 + 9) zusammennehmen, bevor man die weiteren Verbindungen vornimmt. Ähnlich in ähnlichen Fällen.

*) Sieh ***) S. 10.

4. Multiplizieren unbenannter Zahlen.

§ 10.

1) Multiplizieren heißt eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine andere Zahl Einheiten enthält; z. B. 5 multipliziert mit 3 gibt $5 + 5 + 5 = 15$. Das Multiplizieren ist demnach ein wiederholtes Addieren derselben Zahl.

Die Zahl, welche als Summand gesetzt werden soll, heißt Multiplikand, die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplikand als Summand gesetzt werden soll, Multiplikator; das Resultat der Multiplikation wird Produkt genannt.

Das Zeichen der Multiplikation ist entweder ein $\times$ oder auch ein Punkt und wird „mal" gelesen.

Anmerkung: Ist einer der beiden Ausdrücke keine dekadische Zahl, so darf man das Multiplikationszeichen weglassen.

2) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Multiplikationszeichen, so hat man ein Produkt. Z. B. 4×8 ist ein Produkt, in welchem 4 der Multiplikator, 8 der Multiplikand ist.

3) Wird ein Produkt mit irgend einem Ausdrucke durch Addition oder Subtraktion verbunden, so ist es nicht gebräuchlich, das Produkt in Klammern zu setzen. (§ 3, 4.)

§ 11.

1) Im Produkte dürfen Multiplikand und Multiplikator vertauscht werden. Zerlegt man nämlich in der Summe $3 + 3 + 3 + 3$ jeden dieser Summanden 3 in seine Einheiten und schreibt diese untereinander, so erhält man:

$$\begin{aligned} 3 + 3 + 3 + 3 = {} & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Es ist nun (§ 3, 3) gleichgiltig, in welcher Ordnung die Summanden dieser Summe addiert werden; geschieht dieses aber nach den wagrechten Reihen, so erhält man, weil in jeder Reihe 4 Einheiten und drei solche Reihen vorhanden sind: $4 + 4 + 4$; es ist also $3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4$ oder $4 \times 3 = 3 \times 4$, d. h. es ist gleichgiltig, welche von den beiden Zahlen des Produktes als Summand gesetzt wird, oder Multiplikand und Multiplikator dürfen vertauscht werden, weshalb Multiplikand und Multiplikator den gemeinschaftlichen Namen Faktoren erhalten.

2) Mit einer Zahl wird eine Summe multipliziert,

indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Z. B. $4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3$.*)

Die Klammer (§ 3, 4) zeigt an, daß die durch Addition von 5 und 3 erhaltene Summe 4mal als Summand gesetzt werden soll; es kommt also $5 + 3$ in der erhaltenen Summe 4mal als Summand vor, mithin ist

$$4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3.$$

3) Mit einer Zahl wird eine Differenz multipliziert, indem man sowohl Minuend als Subtrahend mit der Zahl multipliziert und das letzte Produkt vom ersten subtrahiert.

Z. B. $3 \times (4 - 2) = 3 \times 4 - 3 \times 2$.**)

$3 \times (4 - 2)$ heißt, die Differenz $4 - 2$ soll 3mal als Summand gesetzt werden: man erhält also ein Aggregat, in welchem 4 mit dem Zeichen + dreimal***) und 2 mit dem Zeichen — ebenfalls dreimal vorkommt, welches also (nach § 8) $= (4 + 4 + 4) - (2 + 2 + 2) = 3 \times 4 - 3 \times 2$ ist.

4) Mit einer Zahl wird ein Produkt multipliziert, indem man einen Faktor mit der Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem andern Faktor.

Z. B. $6 \times (4 \times 2) = 4 \times (6 \times 2) = 4 \times 12 = 48$, denn 4×2 ist $2 + 2 + 2 + 2$; diese Summe soll aber mit 6 multipliziert werden, dadurch erhält man (nach 2) $6 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2 = 4 \times (6 \times 2) = 4 \times 12 = 48$.

Anmerkung: Aus dem unmittelbar Vorhergehenden folgt auch, daß in jedem Produkte aus mehreren Faktoren dieselben beliebig geordnet und zusammengefaßt werden dürfen.

§ 12.

1) Soll eine Zahl mit 10 multipliziert werden, so muß jede ihrer Ziffern einen 10mal so großen Wert ausdrücken; es geht also die Einheit einer jeden Ziffer in die Einheit der nächst höheren

*) Umgekehrt: Produkte mit einem gemeinsamen Faktor werden addiert, indem man die Summe der nicht gemeinsamen Faktoren mit dem gemeinschaftlichen Faktor multipliziert.

**) Umgekehrt: Produkte mit einem gemeinschaftlichen Faktor werden subtrahiert, indem man die Differenz der nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

***) Das Zeichen + kommt eigentlich nur zweimal vor; allein aus § 3, 3 und § 8 ist leicht zu ersehen, daß ein mit einem Additionszeichen versehenes Glied dieses Zeichen verliert, wenn es an die erste Stelle kommt, und es wieder erhält, wenn es an eine andere Stelle kommt, weßhalb auch in § 8 das erste Glied des Aggregats zu den additiven (positiven) Gliedern gerechnet wurde.

Ordnung über; man hat demnach jede Ziffer an die nächst höhere Stelle zu rücken (Erklärung vom Decimalsystem), was dadurch erreicht wird, daß man der Zahl rechts eine Null anhängt. Soll mit 100 multipliziert werden, so erhält jede Ziffer einen hundertmal so großen Wert, also rückt jede Ziffer an die zweit höhere Stelle, so daß man also rechts nur zwei Nullen anzuhängen braucht u. s. f. Daraus ergibt sich folgende Regel:

Soll eine Zahl mit 10, 100, 1000 oder überhaupt mit einer Zahl, welche nur mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, multipliziert werden, so hat man der zu multiplizierenden Zahl rechts so viele Nullen anzuhängen, als die Zahl hat, mit welcher multipliziert werden soll.

Z. B. $10000 \times 4735 = 47350000$.

2) Ist irgend eine Zahl z. B. 432 mit einer einzifferigen (4) zu multiplizieren, so kann man 432 zerlegen in $400 + 30 + 2$. Eine Summe wird aber multipliziert (§ 11, 2), indem man jeden Summanden multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert. Man hat also

$$\begin{array}{rcl} 4 \times 2 &=& 8 \\ 4 \times 30 &=& 120 \\ 4 \times 400 &=& 1600 \\ \hline \text{also } 4 \times 432 &=& 1728, \end{array}$$

woraus man ersieht, daß jede Ziffer von rechts nach links mit Berücksichtigung ihres Stellenwertes multipliziert wird, und sich folgende Regel ergibt:

Mit einer einziffrigen Zahl wird eine mehrziffrige multipliziert, indem man mit der einziffrigen Zahl zuerst die Einer, dann die Zehner rc. multipliziert und jedes Produkt an die entsprechende Stelle schreibt; ist aber eines der Produkte zweiziffrig, so werden die Zehner dieses zweiziffrigen Produktes zum nächstfolgenden Produkte addiert.

3) Wenn der Multiplikator eine einziffrige Zahl mit rechts angehängten Nullen ist, wie z. B. 500×3427, so kann man 500 in 5×100 zerlegen, mit 5×100 wird aber (nach § 11, 4) multipliziert, indem man zuerst mit 5 multipliziert, und dann das erhaltene Produkt mit 100 (nach § 12, 1), indem man dem Multiplikanden zwei Nullen anhängt, also $500 \times 3427 = 1713500$; d. h.

Mit einer Zahl, welche mit einer geltenden Ziffer

und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, wird multipliziert, indem man mit der den Nullen vorausgehenden Zahl multipliziert und dem Produkte so viele Nullen anhängt, als der Multiplikator enthält.

4) Ist auch der Multiplikator eine mehrziffrige Zahl, z. B. im Produkt 283 × 473, so kann man 283 zerlegen in 200 + 80 + 3; mit einer Summe aber wird multipliziert (nach § 11, 1 u. 2), indem man mit jedem Summanden multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert; man hat also 473 mit 200, mit 80 und mit 3 zu multiplizieren und diese Produkte, welche Teil- oder Partial-Produkte heißen, zu addieren; nun ist (nach 3)

$$\begin{array}{r} 200 \times 473 = 94600 \\ 80 \times 473 = 37840 \\ 3 \times 473 = 1419 \\ \hline 133859. \end{array}$$

Man kann aber auch zuerst mit 3, dann mit 80 und zuletzt mit 200 multiplizieren und erhält dann:

$$\begin{array}{r} 3 \times 473 = 1419 \\ 80 \times 473 = 37840 \\ 200 \times 473 = 94600 \\ \hline 133859, \end{array}$$

oder drittens in ganz beliebiger Ordnung, wie zuerst mit 80, dann mit 3, und endlich mit 200, so daß man erhält:

$$\begin{array}{r} 80 \times 473 = 37840 \\ 3 \times 473 = 1419 \\ 200 \times 473 = 94600 \\ \hline 133859. \end{array}$$

Läßt man in diesen Teilprodukten die Nullen weg, so erhält man folgende Darstellungen:

283 × 473.

a)		b)		c)	
946--	(2)	1419	(3)	3784-	(8)
3784-	(8)	3784-	(8)	1419	(3)
1419	(3)	946--	(2)	946--	(2)
133859		133859		133859	

Hieraus ergibt sich folgende Regel:

Mit einer mehrziffrigen Zahl wird eine andere multipliziert, indem man mit jeder Ziffer der mehrziffrigen Zahl multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte unter einander schreibt, jedoch so, daß man mit jedem folgenden Teilprodukte um so viele Stellen nach rechts oder nach links rückt, als die Ziffer,

durch welche das Teil- (Partial-)produkt erhalten wurde, rechts oder links von derjenigen steht, welche das vorhergehende Teilprodukt gegeben hat, und endlich die so unter einander geschriebenen Teilprodukte addiert.

Anmerkung. Aus dem Obigen ergibt sich von selbst, was zu thun ist, wenn Multiplikatoren wie 30005 oder 47500028 gegeben sind.

5) Hat der eine Faktor oder beide Faktoren rechts angehängte Nullen, so lasse man diese während des Multiplizierens weg und hänge nach der Multiplikation dem Produkte rechts so viele Nullen an, als beide Faktoren zusammen haben.

Z. B. 584000 × 460300

584 × 4603

23015 mit 5
36824 „ 8
18412 „ 4
= 268815200000.

5. Dividieren unbenannter Zahlen.

§ 13.

1) Dividieren heißt eine Zahl in so viele gleiche Teile teilen, als eine andere Zahl Einheiten enthält, und die Größe eines solchen Teiles angeben. Die erste Zahl heißt Dividend, die andere Divisor, die gesuchte Zahl wird Quotient genannt.

Für Quotienten hat man eine doppelte Bezeichnung; entweder schreibt man links den Dividenden, rechts davon den Divisor, und zwischen beide einen Doppelpunkt (:), oder man schreibt zuerst den Dividenden, darunter den Divisor, und zwischen beide einen Strich (—). Gelesen wird: „Dividiert oder geteilt durch."

2) Vorstehender Erklärung zufolge kann der Dividend als eine Summe von so vielen dem Quotient gleichen Summanden betrachtet werden, als der Divisor Einheiten enthält, folglich (nach § 10, 1) als ein Produkt, dessen einer Faktor der Divisor, dessen anderer Faktor der Quotient ist.

Daraus folgt eine zweite Erklärung, nämlich: Dividieren heißt aus einem Produkte und einem Faktor desselben den andern Faktor finden.

3) Da der gegebene Faktor (Divisor) (nach § 11, 1) sowohl

als Multiplikator als auch als Multiplikand angesehen werden kann, so folgt hieraus eine zweifache Auffassung der Division:

a) Wird der Divisor als Multiplikator betrachtet, so ist die Zahl der Teile gegeben und die Größe eines Teiles gesucht; dies heißt Dividieren in jenem Sinne, in welchem es oben erklärt wurde. Wird z. B. im Quotienten 12 : 4 der Divisor 4 als Multiplikator angesehen, so verlangt die Aufgabe, es soll 12 in 4 gleiche Teile geteilt und die Größe eines solchen Teiles angegeben werden. (Umkehrung der Multiplikation.)

b) Wird aber der Divisor als Multiplikand betrachtet, so ist die Größe eines Teiles gegeben und die Anzahl der Teile gesucht, d. h. es wird gefragt: Wie oft ist der Divisor im Dividenden enthalten? Wird nämlich im obigen Beispiele 12 : 4 der Divisor 4 als Multiplikand angesehen, so ist die Frage: Wie oft kann man 4 von 12 hinwegnehmen, oder, wie oft ist 4 in 12 enthalten? (Wiederholte Subtraktion.) Die Division untersucht also hier ein Enthaltensein. (Messen § 1.)

4) Steht zwischen zwei Ausdrücken das Divisionszeichen, so hat man einen Quotienten, z. B. $12 : 3 = \frac{12}{3}$ ist ein Quotient, worin 12 der Dividend, 3 der Divisor ist.

5) Wird ein Quotient, nach der zweiten Bezeichnungsweise geschrieben, mit irgend einem Ausdrucke verbunden, so schreibt man ihn nicht in Klammern. Nach der ersten Bezeichnungsweise sind sie ebenfalls überflüssig, wenn der Quotient durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation verbunden wird; (ebenso, wenn er als Dividend steht).

§ 14.

1) Ein Quotient mit seinem Divisor multipliziert muß den Dividenden geben; denn nach der zweiten Erklärung vom Dividieren ist der Dividend ein Produkt, der Divisor aber und der Quotient sind die Faktoren desselben.

2) Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert. Z. B. $(15 + 12) : 3 = 15 : 3 + 12 : 3 = 5 + 4 = 9$; denn dividiert man 15 und 12 durch 3, so erhält man $15 : 3 = 5$, und $12 : 3 = 4$, also ist $15 = 3 \times 5$; $12 = 3 \times 4$, mithin $15 + 12 = 3 \times 5 + 3 \times 4 = 3\,(5 + 4)$, (§ 11, 2); $(15 + 12) : 3 = 3\,(5 + 4) : 3 = 5 + 4$ (§ 13, 2) $= 15 : 3 + 12 : 3$.

3) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Minuenden und den Subtrahenden durch die Zahl dividiert und letzteren Quotienten vom ersten subtrahiert.

Z. B. $(24 - 15) : 3 = 24 : 3 - 15 : 3 = 8 - 5 = 3$; denn dividiert man 24 und 15 durch 3, so erhält man $24 : 3 = 8$ und $15 : 3 = 5$, also ist $24 = 3 \times 8$; $15 = 3 \times 5$, mithin $24 - 15 = 3 \times 8 - 3 \times 5 = 3(8 - 5)$ (§ 11, 3 umgekehrt), folglich $(24 - 15) : 3 = 3(8 - 5) : 3 = 8 - 5$ (§ 13, 2) $= 24 : 3 - 15 : 3$.

4) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen Faktor durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert.

Z. B. $(5 \times 21) : 7 = 5 \times (21 : 7) = 5 \times 3 = 15$.

5×21 läßt sich als Summe darstellen, in welcher 5 mal der Summand 21 vorkommt, man hat dann jeden Summanden (nach 2) durch 7 zu dividieren, also, da man 5 solche gleiche Quotienten erhält, von denen jeder $21 : 7$ ist, hat man

$$5 \times (21 : 7) = 5 \times 3 = 15.$$

5) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Dividenden durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den Divisor, oder indem man den Dividenden dividiert durch das Produkt aus der Zahl und dem Divisor. (Begründung ähnlich wie bei 4.)

6) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividiert, indem man die Zahl durch einen Faktor des Produktes dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den andern Faktor.

7) Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man die Zahl mit dem Dividenden multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividiert, oder indem man die Zahl durch den Divisor dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem Dividenden multipliziert.

8) Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man die Zahl mit dem Divisor multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Dividenden dividiert.

§ 15.

1) Soll eine Zahl durch 10 dividiert werden, so erhält jede Ziffer den zehnten Teil ihres früheren Wertes, es rückt also jede

Ziffer an die nächst niedrigere Stelle (Erklärung vom dekadischen Systeme). Dieses wird dadurch erreicht, daß man in der zu dividierenden Zahl die letzte Ziffer rechts wegstreicht; z. B. 4260 : 10 = 426. Soll aber durch 100 dividiert werden, so erhält jede Ziffer den hundertsten Teil ihres früheren Wertes, also rückt jede an die zweit niedrigere Stelle, somit hat man im Dividenden die zwei letzten Ziffern rechts wegzustreichen u. s. f. Die durch die weggestrichenen Ziffern dargestellte Zahl nennt man Rest der Division.

Z. B. 29700 : 100 = 297
45000 : 1000 = 45
4867329 : 10000 = 486 als Quotient mit dem Reste 7329.

Daraus folgt die Regel:

Durch 10, 100, 1000, oder überhaupt durch eine Zahl, welche nur mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, dividiert man, indem man von dem Dividenden rechts so viele Ziffern wegstreicht, als der Divisor Nullen enthält.

Anmerkung. In obigem Beispiele wie in allen Fällen, in welchen sich bei der Division ein Rest ergibt, zeigt dieser Umstand an, daß der Dividend nicht ein Produkt ist, dessen einer Faktor der Divisor, dessen anderer Faktor eine (ganze) Zahl ist, sondern als eine Summe aus einem solchen Produkte und einer andern Zahl betrachtet werden muß, welche kleiner als der Divisor ist.

2) Um eine beliebige Zahl z. B. 7944 durch eine einziffrige (3) zu dividieren, kann man 7944 zerlegen in 7000 + 900 + 40 + 4; eine Summe wird aber (nach § 14, 2) dividiert, indem man jeden Summanden dividiert;

der dritte Teil von 7 Tausend sind 2 Tausend, dabei bleibt ein Rest von 1 Tausend oder 10 Hundert, dazu den zweiten Summanden 9 Hundert addiert, gibt 19 Hundert;

der dritte Teil von 19 Hundert sind 6 Hundert, mit dem Reste 1 Hundert oder 10 Zehner, dazu 4 Zehner addiert, gibt 14 Zehner;

der dritte Teil von 14 Zehnern sind 4 Zehner mit dem Reste 2 Zehner; 2 Zehner sind gleich 20 Einern, und dazu die schon vorhandenen 4 Einer addiert, macht 24 Einer;

der dritte Teil von 24 Einern sind 8 Einer; somit hat man

$$7944 : 3 = (7000 + 900 + 40 + 4) : 3$$
$$= 2000 + 600 + 40 + 8$$
$$= 2648.$$

Läßt man die Nullen weg, so braucht man bloß mit jeder folgenden Ziffer des Quotienten um eine Stelle weiter nach rechts zu rücken und schreibt dann:

```
7944 : 3 = 2648
6
―
19
18
――
 14
 12
 ――
  24
  24
  ――
```

der dritte Teil von 7 ist 2, 2 × 3 gibt 6, 6 von 7 bleibt 1, die nächste Stelle 9 dazu, der dritte Teil von 19 ist 6 u. s. f.

Anmerkung: Die Produkte 6, 18, 12 und 24 schreibt man gewöhnlich nicht an.

Dasselbe Verfahren gilt auch für die Division durch eine mehrziffrige Zahl.

```
Z. B. 326352 : 523 = 624
      3138
      ――――
       1255
       1046
       ――――
        2092
        2092
        ――――
```

3263 geteilt durch 523 gibt 6; 6 × 523 gibt 3138, es bleibt also der Rest 125; dazu kommt 5;

1255 geteilt durch 523 gibt 2; 2 × 523 ist 1046; es bleibt der Rest 209; dazu 2;

2092 geteilt durch 523 gibt 4, wobei der Rest 0 bleibt; somit ist 624 der Wert des Quotienten.

Daraus folgt als Regel für das Dividieren durch eine beliebige Zahl:

Man nehme vom Dividenden von links nach rechts ebensoviele Ziffern, als der Divisor hat, — oder, wenn die dadurch vorgestellte Zahl kleiner ist als der Divisor, eine mehr — dividiere diese Zahl durch den Divisor, multipliziere hierauf mit dem erhaltenen Quotienten den Divisor, subtrahiere dieses Produkt, hänge an den Rest die nächste Ziffer des Dividenden, dividiere wieder und fahre so lange fort, bis alle Ziffern des Dividenden in Rechnung gebracht sind.

Bei jeder einzelnen Division untersuche man zuerst, wie oft die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten des Dividenden enthalten ist mit Berücksichtigung der folgenden Ziffer des Divisors und Dividenden.

3) Hat der Divisor rechts Nullen, so läßt man sie während der Division unbeachtet, streicht aber vom Dividenden ebensoviele Ziffern rechts weg, als der Divisor Nullen hat; dem Reste werden dann die weggestrichenen Ziffern wieder zugesetzt.

Z. B. 6847|23 : 52|00 = 131 als Quotient mit dem Reste 3523.

```
6847|23 : 52|00
52
---
164
156
---
 87
 52
---
 35
```

§ 16.

1) Aus § 14, 1) folgt die **Probe für die Division:** Multipliziert man den Quotienten mit dem Divisor, so muß man den Dividenden erhalten.

2) Aus der zweiten Erklärung vom Dividieren geht die **Probe für die Multiplikation** hervor: Dividiert man das Produkt durch einen Faktor, so muß man den andern erhalten.

3) Sind mehrere Ausdrücke teils durch Multiplikation, teils durch Division zu verbinden, so folgen die einzelnen Operationen in derselben Ordnung wie die Ausdrücke selbst aufeinander, wenn nicht durch Klammern eine andere Ordnung angezeigt ist. (§ 8.)

Anmerk.: Dasjenige, was bisher in § 3, 4; § 10, 3; § 13, 5 u. § 16, 3 über die Anwendung von Klammern bemerkt wurde, läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

1) Man teilt die Zahlenverbindungen nicht nur nach ihrer Art in **gerade** (direkte) (Addition und Multiplikation) und **umkehrende** (indirekte) (Subtraktion und Division) ein, sondern auch in **Stufen** und nennt die Addition mit ihrer Umkehrung (Subtraktion) Zahlenverbindungen der ersten Stufe, die Multiplikation mit ihrer Umkehrung (Division) Zahlenverbindungen der zweiten Stufe.

2) Für die Aufeinanderfolge der angeschriebenen Zahlenverbindungen gelten folgende Regeln:

a) Zahlenverbindungen derselben Stufe werden in der **natürlichen** Ordnung vorgenommen, d. h. in jener Reihenfolge, in welcher die angeschriebenen Ausdrücke aufeinander folgen.

b) Bei vorkommenden Zahlenverbindungen verschiedener Stufen geht jedesmal, wenn nicht durch Klammern das Gegenteil angedeutet ist, die Zahlenverbindung der höheren Stufe jener der niedrigeren voraus.

c) Klammern werden also gesetzt, um anzudeuten, daß die Zahlenverbindungen nicht in der gewöhnlichen Ordnung vorgenommen werden sollen.

d) Der (Bruch-)Strich zwischen Dividend und Divisor ersetzt nicht nur die Divisionspunkte, sondern auch allenfalls für den Zähler oder für den Nenner oder für beide notwendige Klammern.

6. Rechnungsvorteile bei der Multiplikation und Division.

§ 17.

1) Läßt sich der Multiplikator in Faktoren zerlegen (was in § 29 weiter ausgeführt wird), mit welchen bequem zu multiplizieren ist, so multipliziere man zuerst mit einem Faktor und das erhaltene Produkt mit dem andern (nach § 11, 4).

Z. B. a) 63 × 47632; 63 = 9 × 7
428688 (mit 9)
= 3000816 (mit 7)

b) 4200 × 43725; 4200 = 6 × 700
262350 (mit 6)
= 183645000 (mit 700).

Anmerkung: Ist in einem solchen Falle auch der Multiplikand eine Zahl, welche leicht im Gedächtnisse zu behalten ist, so schreibe man die in Mitte stehenden Ausdrücke nicht an, sondern behalte sie im Kopfe. Z. B. statt 27 × 43 = 9 × (3 × 43) = 9 × 129 = 1161 schreibe man 27 × 43 = 1161.

2) Multipliziert man (nach § 12, 4, a) zuerst mit der höchsten Ziffer des Multiplikators, so kann man das Teilprodukt von der niedrigsten Ziffer, ohne es anzuschreiben, bei der Addition der Teilprodukte gleich einzählen.

Z. B. a) 6843 × 47325
283950
378600
189300
= 323844975. (3 × 47325 = 141975 wurde gleich eingezählt.)

b) 508 × 2406
12030
= 1222248.

3) Hat der Multiplikator an irgend einer Stelle 1, so kann man den Multiplikanden gleich als Teilprodukt benützen, wenn § 12, 4, c) beobachtet wird.

Z. B. a) 156 × 5924
29620
= 924144. (in Verbindung mit 2))

b) 721 × 2084
4168
14588
1502564.

c) 24138 × 4246 - -
16984 - - - (mit 4)
8492 - - - - („ 2)
12738 - („ 3)
33968 („ 8)
= 102489948.

d) (wieder in Verbindung mit 2))
2187 × 46039
92078 -
368312
= 100687293.

4) Stehen im Multiplikator zwei Ziffern so neben einander, daß sie eine Zahl darstellen, mit welcher leicht multipliziert werden kann, so multipliziere man, wie mit einer einziffrigen Zahl (nach § 12, 4, c).

Z. B. 13015 × 4356
65340 (mit 15)
56628 („ 13)
= 56693340.

5) Mit 11 wird multipliziert, indem man an die erste Stelle die Einer, an die nächste Stelle die Summe aus den Einern und Zehnern, an die folgende die Summe aus den Zehnern und Hunderten der zu multiplizierenden Zahl u. s. w. schreibt.

Z. B. 11 × 60487329
= 665360619.

Denn 11 = 10 + 1; mit einer Summe wird multipliziert nach § 11, 2, mit 10 nach § 12, 1 — also rückt 9 unter 0, 2 unter 9, 3 unter 2 u. s. f.

6) Aehnlich wie in 5) ist das Verfahren, wenn mit 111, 1111 oder überhaupt mit einer Zahl, die an jeder Stelle 1 hat, multipliziert werden soll.

Z. B. a) 111 × 47632
= 5287152
2 = 2
2 + 3 = 5
2 + 3 + 6 = 11
1 + 3 + 6 + 7 = 17
1 + 6 + 7 + 4 = 18
1 + 7 + 4 = 12
1 + 4 = 5

b) 11111 × 4062538
= 45138859718.

$$
\begin{array}{r}
8 = 8 \\
8 + 3 = 11 \\
1 + 8 + 3 + 5 = 17 \\
1 + 8 + 3 + 5 + 2 = 19 \\
1 + 8 + 3 + 5 + 2 + 6 = 25 \\
2 + 3 + 5 + 2 + 6 + 0 = 18 \\
1 + 5 + 2 + 6 + 0 + 4 = 18 \\
1 + 2 + 6 + 0 + 4 \quad = 13 \\
1 + 6 + 0 + 4 \quad = 11 \\
1 + 0 + 4 \quad = 5 \\
4 \quad = 4
\end{array}
$$

7) Mit 101, 1001, 10001, oder mit einer andern Zahl, von welcher die erste und letzte Ziffer 1 ist, die dazwischenliegenden Nullen sind, wird multipliziert, indem man der zu multiplizierenden Zahl so viele Nullen anhängt, als der Multiplikator Ziffern hat, weniger eine, und dazu die zu multiplizierende Zahl addiert. Die anzuhängenden Nullen kann man durch Punkte anzeigen, dann ist es nicht notwendig, die ursprüngliche Zahl als Teilprodukt anzuschreiben.

Z. B. a) $\underline{101 \times 6823..}$
$= 689123.$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Denn } 101 \times 6823 & = & (100 + 1) \times 6823 \\
100 \times 6823 & = & 682300 \\
1 \times 6823 & = & \underline{6823} \\
 & & 689123.
\end{array}
$$

b) $\underline{100001 \times 720584.....}$
$= 72059120584.$

8) Aehnlich wie bei 7) kann mit 9, 99, 999 u. s. f. d. h. mit jeder Zahl multipliziert werden, welche mit lauter Neunern geschrieben ist, nur muß man die zu multiplizierende Zahl nicht addieren, sondern subtrahieren.

Z. B. a) $\underline{9 \times 4732.}$
$= 42588.$

2	von	10	bleiben	8
3	„	11	„	8
7	„	12	„	5
4	„	6	„	2
0	„	4	„	4

$$
\begin{array}{rcl}
\text{denn } 9 \times 4732 & = & (10 - 1) \times 4732 \\
10 \times 4732 & = & 47320 \\
- 1 \times 4732 & = & \underline{- 4732} \\
 & & 42588
\end{array}
$$
(§ 11, 3) und § 12, 1)).

b) 99 × 30574..
= 3026826.

4 von 10 bleiben 6
7 „ 9 „ 2
5 „ 13 „ 8
0 „ 6 „ 6
3 „ 5 „ 2
0 „ 0 bleibt 0
0 „ 3 bleiben 3

denn 99 × 30574 = (100 — 1) × 30574
100 × 30574 = 3057400
—1 × 30574 = —30574
3026826.

c) 99999 × 47098524.....
= 4709805301476.

4 von 10 bleiben 6
2 „ 9 „ 7
5 „ 9 „ 4
8 „ 9 bleibt 1
9 „ 9 „ 0
0 „ 3 bleiben 3
7 „ 12 „ 5
4 „ 4 bleibt 0
0 „ 8 bleiben 8
0 „ 9 „ 9
0 „ 0 bleibt 0
0 „ 7 bleiben 7
0 „ 4 „ 4

denn 99999 × 47098524 = (100000 — 1) × 47098524
100000 × 47098524 = 4709852400000
— 1 × 47098524 = — 47098524
4709805301476.

9) Hat der Multiplikator an allen Stellen mit Ausnahme der niedrigsten Stelle die Ziffer 9, so kann man mit der nächsten höhern Zahl, welche mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird, multiplizieren und von dem erhaltenen Produkte den so vielfachen Multiplikand subtrahieren, als diejenige Zahl Einheiten hat, welche den Multiplikator zu der nächsten höhern Zahl ergänzt, welche mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird.

Z. B. a) 994 × 497352...
= 494367888.

denn 994 × 497352 = (10000 — 6) × 497352
1000 × 497352 = 497352000
— 6 × 497352 = —2984112
494367888.

b) 99998 × 407324.....
= 40731585352.

Denn 99998 × 407324 = (100000 — 2) × 407324
100000 × 407324 = 40732400000
— 2 × 407324 = — 814648
40731585352.

10) Mit 25 kann eine Zahl multipliziert werden, indem man der Zahl zwei Nullen anhängt und sie dann durch 4 dividiert (§ 14, 7); denn 25 ist der vierte Teil von Hundert; multipliziert man also mit Hundert, indem man zwei Nullen anhängt, so ist das Produkt das vierfache des gesuchten, man muß daher noch durch 4 dividieren.

Z. B. a) 25 × 762435
= 19060875.

4	in	7	ist	1	mal	enthalten,	bleibt	3	als	Rest
"	"	36	"	9	"	"	"	0	"	"
"	"	2	"	0	"	"	"	2	"	"
"	"	24	"	6	"	"	"	0	"	"
"	"	3	"	0	"	"	"	3	"	"
"	"	35	"	8	"	"	"	3	"	"
"	"	30	"	7	"	"	"	2	"	"
"	"	20	"	5	"	"	"	0	"	"

b) 25 × 380519915
= 9512997875.

11) Mit 125 kann multipliziert werden, indem man der zu multiplizierenden Zahl rechts drei Nullen anhängt und sie dann durch 8 dividiert (§ 14, 7); denn 125 = 1000 : 8.

Z. B. 125 × 6984735
= 873091875.

12) Mit 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 kann multipliziert werden, indem man mit 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 multipliziert und von dem erhaltenen Produkte den zehnten Teil desselben subtrahiert. Denn es ist z. B. 54 = 60 — 6; 6 ist aber der zehnte Teil von 60, also wird mit 60 multipliziert und der zehnte Teil davon subtrahiert.

Z. B. a) 72 × 47395
[3791600 (mit 80)]
= 3412440.

b) 45 × 40369983
[2018499150 (mit 50)]
= 1816649235.

Dasselbe Verfahren kann auch bei der Multiplikation mit 180, 270, 360, 450 u. s. f. angewendet werden.

Z. B. 810 × 2907534 (810 = 900 — 90)
[2616780600 (mit 900)]
2355102540.

Anmerkung. Aehnliche Abkürzungen können auch bei andern Multiplikatoren angewendet werden, wie bei 15, 50, 75, 499, 5999 ꝛc.

13) Durch 25 kann eine Zahl dividiert werden, indem man die Zahl mit 4 multipliziert und die letzten zwei Ziffern wegstreicht (§ 14, 8). Denn 25 ist der vierte Teil von 100 ꝛc.

Z. B. 2793575 : 25
= 111743.

14) Durch 125 kann dividiert werden, indem man den Dividenden mit 8 multipliziert, und die drei letzten Ziffern wegstreicht (§ 14, 8).

Z. B. 232375 : 125
= 1859.

15) Die Division kann auch dadurch abgekürzt werden, daß man die Teilprodukte nicht anschreibt, sondern sogleich, wenn eine Stelle des Divisors multipliziert ist, das Produkt von der entsprechenden Stelle des Dividenden subtrahiert. (§ 15, 2) Anm. S. 17.)

Z. B. a) 7944 : 3 = 2648.
19
14
24

b) 28247776 : 49732 = 568.
338177
397856

49 ist in 282 (§ 15, 2) Ende) fünfmal enthalten. 5 × 2 gibt 10, 10 von 17 bleiben 7. 5 × 3 gibt 15 und 1 sind 16, 16 von 17 bleibt 1. 5 × 7 gibt 35 und 1 sind 36, 36 von 44 bleiben 8. 5 × 9 gibt 45 und 4 sind 49, 49 von 52 bleiben 3. 5 × 4 sind 20 und 5 sind 25, 25 von 28 bleiben 3 u. s. f.

Anmerkung. Auch hier kann man § 6, 2 berücksichtigen.

Zweite Abteilung.

Das Rechnen mit benannten Zahlen.

(Allgemeine Größenlehre.)

A. Gleichbenannte Zahlen.

§ 18.

1) Gleich (einfach) benannte (gleichnamige) Zahlen werden ebenso wie die unbenannten addiert und subtrahiert; das Resultat erhält dann dieselbe Benennung, wie die verbundenen Zahlen.

Z. B. a) 2346 qm + 7983 qm = 10329 qm.

b) Ein Bauer hat 65 Hektar an Aeckern und Wiesen, die Wiesen betragen 23 Hektar; wie viel betragen die Aecker?

Die Aecker betragen 65 Hektar — 23 Hektar = 42 Hektar.

2) Beim Multiplizieren darf nach dem Begriffe desselben (§ 10, 1)) nur der Multiplikand eine benannte Zahl sein; das Resultat erhält dieselbe Benennung, wie der Multiplikand.

Es sei die Aufgabe gegeben: Ein Arbeiter verdient sich in einem Tage 4 ℳ, wie viel verdient er sich in 6 Tagen?

In 6 Tagen wird er sich 6mal so viel verdienen, als in einem Tage (also ist der Multiplikator unbenannt), daher beträgt der Verdienst in 6 Tagen

6 × 4 ℳ = 24 ℳ.

3) Ist beim Dividieren der Dividend eine unbenannte Zahl, so kann der Divisor keine benannte Zahl sein, weil ein unbenanntes Produkt keinen benannten Faktor enthalten kann (§ 13, 2)). Ist aber der Dividend eine benannte Zahl, so kann der Divisor sein

a) eine unbenannte Zahl. In diesem Falle ist er als Multiplikator zu betrachten (§ 13, 3) a)), und der Quotient erhält dann dieselbe Benennung, wie der Dividend;

b) eine mit dem Dividenden gleichbenannte Zahl. In diesem Falle ist er als Multiplikand zu betrachten (§ 13, 3) b)) und der Quotient als Multiplikator ist eine unbenannte (absolute) Zahl.

Z. B. a) Es sei die Aufgabe gegeben:

Vier Hektoliter Wein kosten 120 ℳ, was kostet ein Hektoliter?

Jedes Hektoliter kostet gleich viel, also jedes Hektoliter den vierten Teil von dem, was alle vier Hektoliter zusammen kosten. Deswegen sind 120 ℳ (nach § 13, 3, a)) in vier gleiche Teile zu teilen, und man hat:

120 ℳ : 4 = 30 ℳ;

es kostet demnach ein Hektoliter 30 ℳ.

Oder: Zwölf Arbeiter verdienen sich bei gleicher Leistung des Einzelnen 96 ℳ; wie viel trifft auf jeden?

Jeder der zwölf Arbeiter verdient gleich viel, daher sind die 96 ℳ in zwölf gleiche Teile zu teilen, und man erhält:

96 ℳ : 12 = 8 ℳ;

somit treffen auf jeden Arbeiter 8 ℳ.

In diesen beiden Aufgaben ist der Dividend eine benannte, der Divisor eine unbenannte Zahl, und der Quotient gleich benannt mit dem Dividend.

b) Hat man aber Aufgaben, wie die folgenden:

78 ℳ wurden unter mehrere Personen so verteilt, daß jede 3 ℳ erhielt; wie viele Personen waren es? — so soll (nach § 13, 3, b)) die Anzahl der gleichen Teile gesucht werden, unter der Bedingung, daß ein Teil 3 ℳ beträgt, und es frägt sich: Wie oft sind 3 ℳ in 78 ℳ enthalten? Man hat nun

78 ℳ : 3 ℳ = 26;

es waren also 26 Personen.

Oder: Ein Meter Tuch kostet 6 ℳ, wie viele Meter erhält man für 54 ℳ?

So oft 6 ℳ in 54 ℳ enthalten sind, so oft erhält man ein Meter, daher hat man

54 ℳ : 6 ℳ = 9;

man erhält daher 9 Meter.

Hier sind Dividend und Divisor gleichbenannte Zahlen und der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

In den beiden ersten Aufgaben wurde der Multiplikand, in den beiden letzten der Multiplikator gesucht.

B. Ungleich benannte Zahlen.

1. Erklärungen.

§ 19.

Es gibt benannte Zahlen derselben Art, die jedoch mit verschiedenen Benennungen versehen werden; z. B. Zentner, Pfund,

Gramm; Kronen, Mark, Pfennige; Kilometer, Meter, Centimeter u. s. f. Solche Zahlen heißen mehrfach benannte Zahlen.

Man unterscheidet hier wieder Einheiten von verschiedenen Ordnungen, z. B. ein Pfund heißt in Bezug auf ein Gramm eine Einheit höherer Ordnung, das Gramm eine Einheit niedrigerer Ordnung, weil zu einem Pfund 500 Gramm notwendig sind. 100 Pfennige geben eine Mark; Pfennige sind daher Einheiten niedriger Ordnung, Mark Einheiten höherer Ordnung u. s. f.

Daraus ergibt sich zunächst die doppelte Aufgabe:

a) Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung und

b) Einheiten niedrigerer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung zu verwandeln.

Diese doppelte Aufgabe heißt Reduzieren. Die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten niedrigerer Ordnung zu einer Einheit höherer Ordnung gehören, heißt Reduktionszahl.

Anmerkung. Während man gleich benannte Zahlen gleichnamige nennt, heißen die im Vorhergehenden behandelten ungleichnamigen Zahlen gleichartige.

2. Reduzieren.

A. Verwandlung von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung (Resolvieren).

§ 20.

1) Sollen z. B. 5 ℔ in Gramm verwandelt werden, so muß man mit der Reduktionszahl 500 multiplizieren, denn 1 ℔ enthält 500 Gramm, also 5 ℔ fünfmal soviel, somit sind

5 ℔ = 5 × 500 Gramm = 2500 Gramm.

Es werden demnach Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedrigerer Ordnung verwandelt, indem man mit der Reduktionszahl multipliziert.

2) Hat man aber Einheiten von verschiedenen Ordnungen, z. B. 4 Kronen, 2 Mark und 63 Pfennige, in Einheiten der niedrigsten Ordnung (also in Pfennige) zu verwandeln, so verwandle man die Einheiten der höchsten Ordnung in solche der nächst niedrigeren, addiere dazu die gegebenen Einheiten dieser Ordnung, verwandle die so erhaltene Summe in Einheiten der folgenden Ordnung u. s. f., bis man lauter Einheiten der niedrigsten Ordnung hat.

Z. B. 4 Kr. 2 ℳ 63 ₰ = 4263 ₰

```
4 × 10 = 40
          2
         42 × 100 = 4200
                      63
                    4263.
```

Aufgabe. Wie viele Bogen geben 3 Ballen, 4 Rieß, 19 Buch, 15 Bogen Schreibpapier?

3 Ballen, 4 Rieß, 19 Buch, 15 Bogen = 16791 Bogen.

```
3 × 10 = 30
          4
         34 × 20 = 680
                    19
                   699 × 24 = 16776
                                 15
                              16791
```

3) Ist die Reduktionszahl 10, so hat man nur die Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung rechts neben die der höhern zu setzen; fehlen die Einheiten irgend einer Ordnung, so ersetze man die entsprechende Stelle durch eine Null. Ebenso, wenn die Reduktionszahl 100 oder 1000 ist, nur werden durch die nächst niedrigeren Einheiten bei 100 die folgenden zwei Stellen, bei 1000 die folgenden drei Stellen eingenommen.

Z. B. a) 5 Ballen = 50 Rieß.
b) 14 Centner = 1400 Pfund.
c) 4 m 37 cm 2 mm = 4372 mm.
d) 15 qm 5789 qcm = 155789 qcm.
e) 12 cbm 315177 ccm = 12315177 ccm.
f) 9 m 6 cm = 906 cm.
g) 12 qm 24 qcm 7 qmm = 12002407 qmm.
h) 124 cbm 33000 ccm 2 cmm = 124033000002 cmm.
i) 9 Ballen 8 Rieß 7 Buch 5 Hefte 6 Bogen (dec.)*) = 98756 Bg.

B. Verwandlung von Einheiten niedrigerer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung (Reduzieren im engeren Sinne).

§ 21.

1. Aufgabe. Wie viele Wochen geben 6209 Tage?

*) Es rechnen bereits einige Fabriken nach dem Decimalsystem.
1 Ballen = 10 Rieß = 100 Buch = 1000 Hefte = 10000 Bogen.

Zu einer Woche gehören 7 Tage, so oft also die Zahl 7 in 6209 enthalten ist, so viele Wochen erhält man, also hat man:

6209 Tage = 6209 : 7 Wochen = 887 Wochen.

Bleibt bei dieser Division ein Rest, so drückt derselbe Einheiten der gegebenen Ordnung aus.

Man hat daher die Regel:

Einheiten einer niedrigeren Ordnung werden in Einheiten der nächst höheren Ordnung verwandelt, indem man durch die Reduktionszahl dividiert. Durch den Quotienten erhält man die Einheiten der verlangten Ordnung, der Rest stellt Einheiten der gegebenen Ordnung vor.

2. Aufgabe. Wie viele Ballen, Rieß, Buch und Bogen geben 41659 Bogen Druckpapier?

Nach 1) sind:

41659 Bogen = 41659 : 25 Buch = 1666 Buch 9 Bogen,
1669 Buch = 1666 : 20 Rieß = 83 Rieß 6 Buch,
83 Rieß = 83 : 10 Ball. = 8 Ballen 3 Rieß,

folglich sind 41659 Bogen Druckpapier = 8 Ballen 3 Rieß 6 Buch und 9 Bogen.

Einheiten niedrigerer Ordnung werden in Einheiten höherer Ordnung verwandelt, indem man sie zuerst in Einheiten der nächst höheren Ordnung, diese wieder in solche der folgenden Ordnung u. s. w. bis zur höchsten Ordnung verwandelt.

3. Aufgabe. Wie viele Mark und Pfennige geben 549 Pfennige?

549 Pfennige = 5 Mark 49 Pfennige.
549 : 100 gibt 5 Mark
49 Pfennige.

Ist die Reduktionszahl 10, 100, 1000 2c., so hat man nur die gegebene Zahl von rechts nach links in Klassen von je so vielen Ziffern einzuteilen, als die Reduktionszahl Nullen hat; die einzelnen Klassen geben dann die Einheiten der verschiedenen Ordnungen.

Z. B. a) 5|76 ℔ = 5 Ztr. 76 ℔.
b) 4|73|5 mm = 4 m 73 cm 5 mm.
c) 2945|32 qmm = 2945 qcm 32 qmm.

d) 79|352845 ccm = 79 cbm 352845 ccm.
e) 20|40|3 mm = 20 m 40 cm 3 mm.
f) 2|4000|20 qmm = 2 qm 4000 qcm 20 qmm.
g) 90|000032 ccm = 90 cbm 32 ccm.
h) 75|0|0|0|8 Bg. (dec.) = 75 Ballen 8 Bg.

3. Addieren und Subtrahieren.

§ 22.

1) Enthalten die Summanden Einheiten von verschiedenen Ordnungen, so addiere man zuerst die Einheiten der niedrigsten Ordnung, reduziere die erhaltene Summe, addiere den dadurch erhaltenen Quotienten zu den gegebenen Einheiten der nächst höheren Ordnung und fahre so fort, bis Alles addiert ist.

Z. B. Ein Kaufmann erhielt drei Sendungen Waaren; die erste betrug 10 Tonnen, 11 Zentner, 37 Pfund, 52 Gramm; die zweite 7 Tonnen, 11 Zentner, 15 Pfund, 73 Gramm, und die dritte 8 Tonnen, 57 Pfund, 43 Gramm; wie viel erhielt er im Ganzen?

	10 Tonnen	11 Zentner	37 Pfund	52 Gramm
	7 „	11 „	15 „	73 „
	8 „	— „	57 „	43 „
Er erhielt	26 Tonnen	3 Zentner	9 Pfund	168 Gramm.

2) Hat man Einheiten von verschiedenen Ordnungen zu subtrahieren, so beginnt man mit den Einheiten der niedrigsten Ordnung. Ist irgend eine Zahl des Minuenden kleiner als die entsprechende des Subtrahenden, so nehme man vor Ausführung der Subtraktion eine Einheit der nächst höheren Ordnung, resolviere diese auf die gegebene Ordnung und addiere den Minuenden der gegebenen Ordnung dazu.

Z. B. Ein Kaufmann erhielt eine Sendung Zucker und zwar 24 Ztr. 36 ℔ 17 Gramm Brutto-Gewicht; das Tara-Gewicht beträgt 27 ℔ 30 Gramm; wie viel erhielt er Netto?

	24 Ztr.	36 ℔	17 Gramm.
	— „	27 ℔	30 „
Er erhielt Netto:	24 Ztr.	8 ℔	487 Gramm.

Anmerkung. Im Vorhergehenden wurde nur vom Addieren und Subtrahieren gleichartiger, wenn auch ungleichnamiger (d. h. verschieden [ungleich] benannter) Zahlen gehandelt, denn daß man ungleichartige benannte Zahlen, wie Mark und Zentner, oder benannte und unbenannte Zahlen mit einander weder durch Addition noch durch Subtraktion verbinden kann, ist selbstverständlich. (Sieh auch § 19 Anmerk.)

4. Zeitrechnungen durch Addition und Subtraktion.

§ 23.

1) Bei Zeitrechnungen bringt man gewöhnlich diejenige Zeit in Rechnung, welche schon verflossen ist. Z. B. für den 6. März 1864 hat man 1863 Jahre 2 Monate und 5 Tage in Rechnung zu bringen; denn schreibt man 1864, so sind erst 1863 Jahre vorüber 2c. 2c. Hat man umgekehrt durch Rechnung die schon verflossene Zeit von 1860 Jahren, 3 Monaten und 9 Tagen gefunden, so schreibt man dafür den 10. April des Jahres 1861. Denn nachdem 1860 Jahre vorüber waren, schrieb man 1861, nach 3 verflossenen Monaten des Jahres hat man den April und nach 9 Tagen den 10. des Monats.

2) Die Zeitrechnungsaufgaben, welche durch Addition oder Subtraktion gelöst werden können, zerfallen in drei Arten; es kann nämlich gesucht werden:

a) das Ende einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, indem man die Dauer zum Anfange addiert.

Z. B. König Maximilian II. von Bayern wurde den 28. November 1811 geboren und starb in einem Alter von 52 Jahren 3 Monaten und 12 Tagen. Wann war dieses?

1810	Jahre	10	Monate	27	Tage
52	„	3	„	12	„
1863	Jahre	2	Monate	9	Tage,

das war also den 10. März 1864.

b) Die Dauer einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, indem man den Anfang vom Ende subtrahiert.

Z. B. Ludwig der Bayer gelangte auf den deutschen Kaiserthron den 20. Oktober 1314 und starb den 11. Oktober 1347. Wie lange regierte er?

1346	Jahre	9	Monate	10	Tage
1313	„	9	„	19	„
32	Jahre	11	Monate	21	Tage,

demnach regierte er 32 Jahre, 11 Monate, 21 Tage.

c) Der Anfang einer Handlung oder eines Zeitabschnittes, indem man die Dauer vom Ende subtrahiert.

Z. B. Schiller starb am 9. Mai 1805 in einem Alter von 45 Jahren, 5 Monaten und 29 Tagen. Wann war er geboren?

1804	Jahre	4	Monate	8	Tage
45	„	5	„	29	„
1758	Jahre	10	Monate	9	Tage;

Schiller wurde den 10. November 1759 geboren.

Anmerkung. Bei diesen Zeitrechnungen bringen die Einen bei Monaten eben so viele Tage in Rechnung, als der betreffende Monat wirklich hat, wobei jedoch immer mit vollendeter Zeit gerechnet werden muß, während andere jeden Monat zu 30 Tagen annehmen. Bei geschäftlichen Rechnungen aber wird der Monat fast immer zu 30 Tagen angenommen.

5. Multiplizieren.

§ 24.

1) Enthält der Multiplikand Einheiten von verschiedenen Ordnungen, so multipliziere man die Einheiten einer jeden Ordnung, indem man mit jenen der niedrigsten Ordnung beginnt, das Produkt reduziert und die erhaltenen höheren Einheiten zu dem nächsten Produkte addiert, hierauf wieder reduziert und so fortfährt, bis der ganze Multiplikand multipliziert ist.

Z. B. Jemand braucht in jedem Monate 61 ℳ 75 ₰; wie viel braucht er in einem Jahre?

61 ℳ 75 ₰ × 12 = 741 ℳ.

12 × 75 ₰ = 900 ₰ = 9 ℳ.
12 × 61 ℳ = 732 ℳ.
741 ℳ.

Er braucht daher in einem Jahre 741 ℳ.

2) Ist die Reduktionszahl 10, 100 ꝛc., so rechnet man am einfachsten, wenn man Alles auf Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung resolviert, hierauf multipliziert und dann reduziert.

Z. B. Ein Wagenrad hat einen Umfang von 2 m 32 cm; welchen Weg hat es nach 12 Umdrehungen zurückgelegt?

2 m 32 cm = 232 cm
12 × 232 cm = 2784 cm
2784 cm = 27 m 84 cm,

also hat das Rad 27 m 84 cm zurückgelegt.

6. Dividieren.

§ 25.

1) Enthält der Dividend Einheiten von verschiedenen Ordnungen, während der Divisor eine unbenannte Zahl ist, so dividiert man zuerst die Einheiten der höchsten Ordnung, verwandelt den Rest in Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung, addiert die gegebenen dazu, dividiert wieder und fährt so fort, bis Alles in Rechnung gebracht ist.

Z. B. Eine Brunnenröhre liefert in einem Tage 27 Hektoliter, 6 Liter. Wie viel liefert sie in einer Stunde?

27 Hektoliter 6 Liter : 24 = 1 Hektoliter 12 Liter 3 Viertelsliter.

(1)
27 : 24
3 × 100 = 300
6 (12)
306 : 24
18 × 4 = 72 (3)
72 : 24.

2) Enthalten Dividend und Divisor Einheiten verschiedener Ordnungen, so verwandle man Alles in Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung und dividiere hierauf.

Z. B. 1 ℔ Kaffe kostet 2 ℳ 3 ₰, wie viel erhält man für 101 ℳ 50 ₰?

101 ℳ 50 ₰. : 2 ℳ 3 ₰.
101 ℳ 50 ₰ = 10150 ₰.
2 ℳ 3 ₰ = 203 ₰.

Man hat also 10150 : 203 = 50,
und erhält somit 50 ℔.

7. Berechnungen von Flächen und Körpern.

§ 26.

Soll die Größe einer Fläche oder eines Körpers bestimmt werden, so ist im ersten Falle zu untersuchen, wie oft eine Fläche von gegebener Größe in der zu bestimmenden Fläche — im zweiten Falle, wie oft ein Körper von gegebener Größe in dem zu bestimmenden Körper enthalten ist. Es können also als Maße für Flächen nur Flächen und als Maße für Körper nur Körper benützt werden. Hiezu gebraucht man für Flächen das Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, und welches dem entsprechend benannt wird (Quadratmeile, Quadratkilometer, Quadrathektometer, Quadratdekameter ꝛc.) — für Körper den Würfel, dessen Seite wiederum die Längeneinheit ist (Kubikmeile, Kubikkilometer, Kubikmeter ꝛc.).

Anmerkung. Das Quadratdekameter heißt Ar, das Quadrathektometer Hektar.

Die Berechnung ist am leichtesten aus folgenden Beispielen ersichtlich.

1) Eine rechteckige Wand hat eine Höhe von 4 m und eine Breite von 5 m. Wie groß ist die Fläche dieser Wand?

Denkt man sich die mit der Höhe gleichlaufenden Seiten in Meter abgeteilt, und die einander entsprechenden Teilungspunkte durch gerade Linien verbunden, so erhält man so viele Streifen, als die Höhe Meter enthält (in unserm Falle vier); werden die mit der Breite gleichlaufenden Seiten ebenso abgeteilt, und die entsprechenden Teilungspunkte wieder durch Gerade verbunden, so wird dadurch jeder von den erwähnten Streifen in Rechtecke geteilt, wovon jedes ein Meter lang und ebenso breit, also ein Quadratmeter ist. Man erhält aber aus jedem Streifen so viele Rechtecke, als die Breite Meter enthält (hier fünf), und es enthält daher in unserm Falle die ganze Fläche, da vier Streifen vorhanden sind und jeder Streifen die Größe von fünf Quadratmeter hat,

$$4 \times 5 \text{ qm} = 20 \text{ qm}.$$

Man findet die Anzahl der Flächeneinheiten für ein Rechteck, indem man die Zahl der Längeneinheiten welche die Höhe enthält, mit der Anzahl der Einheiten, welche der Breite zukommen, multipliziert.

2) Sind Länge und Breite durch Einheiten verschiedener Ordnungen ausgedrückt, so resolviere man dieselben, bevor man multipliziert, auf Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung.

Z. B. a) Eine rechteckige Tischplatte hat eine Länge von 94 cm 2 mm und eine Breite von 65 cm; welche Fläche hat dieselbe?

Die Fläche eines Rechteckes wird gefunden, wenn man die Längezahl mit der Breitezahl multipliziert.

Die Länge = 94 cm 2 mm = 942 mm,
Die Breite = 65 cm = 650 mm,
somit Fläche = 942 × 650 qmm = 612300 qmm = 6123 qcm;

b) Die Länge eines rechteckigen Ackers beträgt 45 m 60 cm, die Breite desselben 18 m 70 cm, wie viel Ar und Quadratmeter hält dieser Acker?

Länge = 4560 cm. Breite = 1870 cm.
Fläche des Ackers = 4560 × 1870 qcm = 8527200 qcm = 8 Ar 52 qm und 7200 qcm; also beträgt die Fläche des Ackers 8 Ar 52 qm und 7200 qcm.

3) Eine rechteckige Fläche mißt 36 qm, ihre Länge 9 m; wie groß ist die Breite?

Ist eine Fläche 9 m lang, so muß sie 1 m breit sein, um 9 qm zu messen. So oft also in der gegebenen Fläche 9 qm enthalten sind, so viele Meter muß ihre Breite enthalten. Es ist aber

36 : 9 = 4,

daher ist die Fläche 4 m breit.

Wenn eine rechteckige Fläche und eine ihrer Ausdehnungen gegeben sind, so findet man die andere Ausdehnung, indem man die Zahl der Flächeneinheiten durch die Zahl der Längeneinheiten der gegebenen Ausdehnung dividiert.

Z. B. Ein Kupferstich hat eine Fläche von 402 qcm 48 qmm und eine Höhe von 23 cm 4 mm. Wie breit ist derselbe?

Hier muß man zuerst die Fläche und die Höhe durch Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung ausdrücken, d. h. die Fläche durch qmm, die Höhe durch Millimeter, und erhält dann:

402 qcm 48 qmm = 40248 qmm; 23 cm 4 mm = 234 mm

40248 : 234 = 172
1684
468

Die Breite beträgt demnach 172 mm = 17 cm 2 mm.

4) Ein rechteckiger Marmorblock ist 3 m lang, 2 m breit und 4 m hoch, wie viele Kubikmeter enthält derselbe?

Man denke sich eine Begrenzungsfläche, z. B. eine von jenen beiden, welche durch die Länge und Breite des Steines bedingt sind (ebenso wie in 1)) in Quadratmeter abgeteilt, so erhält man (nach 1))

3 × 2 qm.

Denkt man sich hierauf die Höhe des Steines in Meter abgeteilt und durch jeden Teilungspunkt, gleichlaufend mit der eben betrachteten Begrenzungsfläche, eine Ebene gelegt, ebenso durch jede von den Geraden, welche die zuerst erwähnte Begrenzungsfläche in Quadrate teilen, eine mit einer anderen Begrenzungsfläche gleichlaufende Ebene, so teilen die Ebenen, welche durch die Teilungspunkte der Höhe gehen, den Block in so viele Schichten, als die Höhe Meter enthält, in jeder dieser Schichten sind aber so viele Kubikmeter, als die zuerst erwähnte Begrenzungsfläche Quadratmeter hat; somit enthält der Block

4 × (3 × 2) cbm = 24 cbm.

Man findet den Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers, indem man die Zahl der Längeneinheiten mit der Zahl der Breiteneinheiten und das erhaltene Produkt mit jener Zahl multipliziert, welche die Einheiten der Höhe ausdrückt.

5) Sind die Ausdehnungen durch Einheiten verschiedener Ordnungen ausgedrückt, so resolviere man dieselben zuerst auf Einheiten der niedersten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung.

Z. B. Ein Eisenbahnwaggon hat im Lichten eine Länge von 6 m 4 cm, eine Breite von 2 m 5 cm und eine Höhe von 2 m 9 cm; welchen Kubikinhalt hat dieser Waggon?

Länge = 6 m 4 cm = 604 cm,
Breite = 2 m 5 cm = 205 cm,
Höhe = 2 m 9 cm = 209 cm,
Kubikinhalt = 604 × 205 × 209 cm = 25878380 ccm = 25 cbm 878380 ccm.

Der körperliche Inhalt des Waggons ist also = 25 cbm 878380 ccm.

6) Sind der Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers und zwei Ausdehnungen desselben gegeben, und es soll die dritte Ausdehnung gesucht werden, so wird diese erhalten, indem man die Zahl, welche den Kubikinhalt ausdrückt, durch das Produkt der Zahlen, welche den beiden gegebenen Ausdehnungen entsprechen, dividiert. (Erklärung wie bei 3).)

Beispiele. a) Ein rechteckiger Körper hat 385 cbm Inhalt, 7 m Länge und 5 m Breite, wie hoch ist derselbe?

$$385 : (7 \times 5) = 11;$$

der Körper ist 11 m hoch.

b) Eine Kammer hat einen Kubikinhalt von 40 cbm 20000 ccm, die Länge derselben beträgt 4 m 60 cm, die Breite 3 m. Wie hoch ist sie?

Man hat 40 cbm 20000 ccm = 40020000 ccm
4 m 60 cm = 460 cm
3 m = 300 cm

mithin 40020000 : (460 × 300) = 40020000 : 138000 = 290; die Höhe der Kammer beträgt 290 cm = 2 m 90 cm.

7) Sind der Kubikinhalt eines rechteckigen Körpers und eine Kante desselben gegeben, so erhält man die Größe einer jeden der zwei Grenzflächen, in welcher weder die gegebene Kante, noch eine ihr gleichlaufende liegt, indem man die Zahl, welche den Kubikinhalt ausdrückt, durch die Zahl, welche der Kante entspricht, dividiert.

Z. B. Eine rechteckige Braupfanne, deren Höhe 2 m 56 cm beträgt, hält 40 cbm, wie groß ist ihre Bodenfläche?

40 cbm = 40000000 ccm
2 m 56 cm = 256 cm
40000000 : 256 = 156250

Die Bodenfläche hält 156250 qcm = 15 qm 6250 qcm.

Dritte Abteilung.

Von der Teilbarkeit der Zahlen.

1. Erklärungen.

§ 27.

1) Eine Zahl heißt durch eine andere **teilbar**, wenn diese in der ersteren ohne Rest enthalten ist. Z. B. in 21 ist 7 ohne Rest enthalten, also ist 21 durch 7 teilbar. Der Dividend heißt ein **Vielfaches** des Divisors, der Divisor aber **Teiler** oder **Maß** des Dividenden. Im obigen Beispiel ist also 21 ein Vielfaches von 7, dagegen 7 ein Maß oder Teiler von 21.

2) Jede Zahl ist durch 1 und sich selbst teilbar. Diejenigen Zahlen, welche **nur** durch 1 und durch sich selbst teilbar sind, heißen **einfache Zahlen** oder **Primzahlen**, die übrigen heißen **zusammengesetzte Zahlen**.

Z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 sind einfache Zahlen.
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 sind zusammengesetzte Zahlen.

3) Sind zwei oder mehrere Zahlen durch dieselbe Zahl teilbar, so heißt diese **gemeinschaftliches Maß**, **gemeinschaftlicher Faktor**, **Teiler oder Divisor** dieser Zahlen, z. B. 24, 36 und 60 haben die gemeinschaftlichen Maße 2, 3, 4, 6, 12; 12 ist aber das größte dieser Maße, deshalb heißt diese Zahl **das größte gemeinschaftliche Maß** (Faktor, Teiler oder Divisor).

4) Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere Zahlen teilbar ist, heißt **gemeinschaftliches Vielfaches** oder **gemeinschaftlicher Dividend** dieser Zahlen, z. B. 30 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 5, 6, 15, weil 30 durch jede dieser Zahlen teilbar ist; 60, 90, 120 sind ebenfalls gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen, 30 ist aber die kleinste davon, deshalb heißt diese Zahl das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache**.

Zahlen, von welchen je zwei außer 1 kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen **relativ prime Zahlen** (Primzahlen unter sich), z. B. 8, 25 und 27 sind relativ prime Zahlen, denn keine derselben hat mit einer andern ein gemeinschaftliches Maß.

2. Sätze über die Teilbarkeit.

§ 28.

1) Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch ihre Summe durch dasselbe teilbar sein, z. B. 14 und 21 haben das gemeinschaftliche Maß 7, also ist auch 14 + 21 d. i. 35 durch 7 teilbar, denn nach § 14, 2) ist (14 + 21) : 7 = 14 : 7 + 21 : 7, es ist aber 7 sowohl in 14 als in 21 ohne Rest enthalten, mithin auch in der Summe 14 + 21, d. i. in 35.

2) Haben zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch die Differenz dieser Zahlen durch dasselbe teilbar sein, z. B. 25 und 10 haben das gemeinschaftliche Maß 5, also ist auch 25 — 10 d. i. 15 durch 5 teilbar; denn nach § 14, 3) ist (25 — 10) : 5 = 25 : 5 — 10 : 5, es ist aber 5 sowohl in 25 als in 10 ohne Rest enthalten, mithin auch in der Differenz 25 — 10, d. i. in 15.

3) Ist eine Zahl durch eine andere teilbar, so ist auch jedes Vielfache der ersten Zahl durch die zweite teilbar, z. B. 33 ist durch 11 teilbar, also ist auch 33 × 7 d. i. 231 durch 11 teilbar; denn nach § 14, 4) ist (33 × 7) : 11 = (33 : 11) × 7, in 33 ist 11 ohne Rest enthalten, also auch in 33 × 7 d. i. in 231.

4) Ist eine Zahl durch zwei oder mehrere relativ prime Zahlen teilbar, so ist sie auch durch das Produkt derselben teilbar.

3. Kennzeichen der Teilbarkeit und Aufsuchen der Teiler einer Zahl.

§ 29.

1) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer (§ 2) durch 2 teilbar ist.

Z. B. 3754 ist durch 2 teilbar, weil die letzte Ziffer 4 durch 2 teilbar ist. Denn schreibt man die Zahl dekadisch an, so erhält man:

$$3754 = 3000 + 700 + 50 + 4;$$

diese Summe muß (§ 28, 1)) durch 2 teilbar sein, wenn jeder Summand durch 2 teilbar ist, da nun aber alle Zehner, Hunderter,

Tausender ꝛc. durch 2 teilbar sind, so hängt die Teilbarkeit nur vom letzten Summanden d. i. von der letzten Ziffer der Zahl ab.

Ist eine Zahl durch 2 teilbar, so heißt sie eine gerade Zahl, außerdem eine ungerade.

2) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 oder 9 teilbar ist.

Z. B. Die Quersumme von 47358, nämlich $4 + 7 + 3 + 5 + 8 = 27$, ist durch 3 und 9 teilbar, also die Zahl selbst durch 3 und 9 teilbar. Denn es ist:

$$47358 = 40000 + 7000 + 300 + 50 + 8$$
$$= 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 3 \times 100 + 5 \times 10 + 8$$
$$= 4 \times (9999 + 1) + 7 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 5 \times (9 + 1) + 8$$
$$= 4 \times 9999 + 4 + 7 \times 999 + 7 + 3 \times 99 + 3 + 5 \times 9 + 5 + 8$$
$$= (4 \times 9999 + 7 \times 999 + 3 \times 99 + 5 \times 9) + (4 + 7 + 3 + 5 + 8).$$

Jedes der Produkte innerhalb der ersten Klammern ist sowohl durch 3 als durch 9 teilbar, also auch die ganze Summe innerhalb der ersten Klammern (§ 28, 1); die Teilbarkeit hängt demnach nur von der zweiten Summe $4 + 7 + 3 + 5 + 8$ ab; ist diese durch 3 oder 9 teilbar, so ist auch das Ganze teilbar; diese letzte Summe ist aber die Quersumme, also ist die Zahl durch 3 oder 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 oder 9 teilbar ist.

Anmerkung. 1. Quersumme heißt jene Zahl, welche man erhält, wenn man die einzelnen Ziffern (§ 2) einer dekadisch angeschriebenen Zahl ohne Berücksichtigung ihres Stellenwertes addiert.

Anmerkung. 2. Auf ähnliche Art, wie hier das Kennzeichen für die Teilbarkeit einer Zahl durch neun begründet wurde, lassen sich auch folgende Sätze begründen:

a) Die Quersumme für die Summe von zwei oder mehreren Zahlen gibt durch neun dividiert denselben Rest, welchen die Summe aus den Quersummen der einzelnen Summanden bei derselben Behandlung ergibt.

Z. B. S. 5. § 4 gibt

die Quersumme 23 des ersten Summanden durch 9 dividiert den Rest 5,
„ „ 30 „ zweiten „ „ „ „ „ „ 3,
„ „ 36 „ dritten „ „ „ „ „ „ 0,
„ Summe dieser Quersummen oder ihrer Reste „ „ „ „ „ 8,
„ Quersumme 26 der Summe durch 9 dividiert ebenfalls „ „ 8,

b) Die Quersumme des Produktes von zwei oder mehreren Zahlen gibt durch neun dividiert denselben Rest, welchen das Produkt aus den Quersummen der einzelnen Faktoren bei derselben Behandlung ergibt.

Z. B. S. 13 § 12, 5) gibt

die Quersumme 17 des Multiplikators durch 9 dividiert den Rest 8,
„ „ 13 „ Multiplikanden „ „ „ „ „ 4,
das Produkt dieser Quersumme oder ihrer Reste „ „ „ „ „ 5,
die Quersumme 32 des Produktes durch 9 dividiert ebenfalls „ „ 5.

Behandelt man nun Summanden und Summe oder Faktoren und Produkt in der oben angegebenen Weise, und erhält dabei verschiedene Reste, so erkennt man daraus, daß in der Rechnung ein Fehler gemacht wurde. Weil demnach dieses Verfahren dazu dienen kann, Fehler in den Rechnungen zu entdecken, so hat man ihm den Namen Neunerprobe gegeben. Dabei ist sofort zweierlei klar:

Erstens: Wegen der Wechselbeziehungen zwischen Addition und Subtraktion, sowie zwischen Multiplikation und Division, erstreckt sich diese Probe auch auf die indirekten Operationen (Subtraktion und Division).

Z. B. S. 7, § 6, 2 gibt

die Quersumme 18 des Subtrahenden durch 9 dividiert den Rest 0,
„ „ 17 der Differenz „ „ „ „ „ 8,
„ Summe dieser Quersummen oder ihrer Reste „ „ „ „ „ 8,
„ Quersumme 26 des Minuenden durch 9 dividiert ebenfalls „ „ 8.

Ähnlich bei Divisionsbeispielen.

Zweitens: Fehler, welche neun oder ein Vielfaches von neun betragen, können durch die Neunerprobe nicht entdeckt werden.

3) Durch 4 ist eine Zahl teilbar, wenn die durch die beiden letzten Ziffern derselben dargestellte Zahl (Summe der Einer und Zehner) durch 4 teilbar ist.

Z. B. 7356 ist durch 4 teilbar, weil 56 durch 4 teilbar ist. Denn schreibt man die Zahl wieder dekadisch an, so sind alle Hunderter, Tausender 2c. durch 4 teilbar, also die ganze Zahl durch 4 teilbar, wenn die Zehner und Einer zusammengenommen durch 4 teilbar sind.

4) Durch 5 ist eine Zahl teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 5 oder Null ist. (Erklärung dieselbe wie vorher.)

5) Durch 6 ist eine Zahl teilbar, wenn die Zahl durch 2 und 3 teilbar ist.

Z. B. 47412 ist durch 2 teilbar, weil die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist, und durch 3, weil die Quersumme 18 durch 3 teilbar ist, also ist die Zahl auch durch 6 teilbar. (§ 28, 4.)

6) Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die durch die drei letzten Ziffern derselben dargestellte Zahl (Summe der Einer, Zehner und Hunderter) durch 8 teilbar ist.

Z. B. 710456 ist durch 8 teilbar, weil 456 durch 8 teilbar ist. (Erklärung wie bei 3.)

7) Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer Null ist.

8) Durch 11 ist eine Zahl teilbar, wenn der Unterschied zwischen der Summe der Ziffern an den ungeraden Stellen (Einer, Hunderter 2c.) und der Summe der Ziffern an den geraden Stellen (Zehner, Tausender 2c.) 0 oder eine durch 11 teilbare Zahl ist.

Z. B. 97658 ist eine durch 11 teilbare Zahl, weil $(8 + 6 + 9) - (5 + 7) = 23 - 12 = 11$ durch 11 teilbar ist. Denn 97658

$= 9 \times 10000 + 7 \times 1000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 8$
$= 9\,(9999 + 1) + 7\,(1001 - 1) + 6 \times (99 + 1) + 5 \times (11 - 1) + 8$
$= 9 \times 9999 + 9 + 7 \times 1001 - 7 + 6 \times 99 + 6 + 5 \times 11 - 5 + 8$
$= (9 \times 9999 + 7 \times 1001 + 6 \times 99 + 5 \times 11) + 9 - 7 + 6 - 5 + 8;$

9999, 1001, 99, 11 sind durch 11 teilbar, also auch die Vielfachen davon, mithin der ganze eingeklammerte Ausdruck; es ist also die Teilbarkeit nur abhängig von der Teilbarkeit des Aggregates $9 - 7 + 6 - 5 + 8 = (8 + 6 + 9) - (5 + 7)$ d. i. von der oben angegebenen Differenz.

9) Für die übrigen Zahlen gibt es kein so einfaches Kennzeichen der Teilbarkeit, deshalb läßt man den Versuch entscheiden.

10) Will man alle Teiler einer Zahl finden, so versuche man nach einander alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, bis man auf einen Quotienten kommt, welcher dem Divisor gleich oder kleiner als derselbe ist.

4. Zerlegen einer Zahl in ihre einfachen und zusammengesetzten Teiler.

§ 30.

Um eine Zahl in ihre einfachen Teiler zu zerlegen, dividiert man dieselbe durch die kleinste Primzahl, durch welche sie teilbar ist, hierauf den Quotienten wieder durch die kleinste Primzahl, die in ihm ohne Rest enthalten ist, und fahre so fort, bis man 1 als Quotient erhält.

z. B.	420	:	2
	210	:	2
	105	:	3
	35	:	5
	7	:	7
	1		

also sind die einfachen Teiler (Faktoren) 2, 2, 3, 5, 7, deren Produkt der gegebenen Zahl 420 gleich ist.

Um die zusammengesetzten Teiler zu finden, kann man mit jedem folgenden einfachen Teiler alle vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten multiplizieren. Also im obigen Beispiele:

420	:	2	
210	:	2	4
105	:	3	6, 12
35	:	5	10, 15, 20, 30, 60
7	:	7	14, 21, 35, 28, 42, 84, 70, 105, 140, 210, 420.
1			

Ein anderes Beispiel ist:

504	:	2	
252	:	2	4
126	:	2	8
63	:	3	6, 12, 24
21	:	3	9, 18, 36, 72
7	:	7	14, 21, 28, 56, 42, 84, 168, 63, 126, 252, 504.
1			

5. Größtes gemeinschaftliches Maß.

§ 31.

1) Ist eine Zahl durch eine andere teilbar, so ist diese letzte das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. (§ 27, 3.)

Z. B. Das größte gemeinschaftliche Maß von 63 und 21 ist 21.

2) Außerdem wird das größte gemeinschaftliche Maß für zwei oder mehrere Zahlen gefunden, wenn man jede Zahl in ihre Primfaktoren zerlegt. Das Produkt der gemeinschaftlichen Faktoren ist dann das größte gemeinschaftliche Maß.

z. B. Für 455 und 715 hat man:

$$455 = 5 \times 7 \times 13$$
$$715 = 5 \times 11 \times 13$$

also ist das größte gemeinschaftliche Maß für 455 und 715 das Produkt $5 \times 13 = 65$.

3) Ein anderes Verfahren geht aus folgendem Satze hervor: Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest bleibt, so ist das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor.

z. B. Für 161 und 14 hat man:

$$\overbrace{161 : 14}^{11}$$

21

7 als Rest.

Der Divisor 14 und der Rest 7 haben das größte gemeinschaftliche Maß 7, also ist 7 auch das größte gemeinschaftliche Maß für den Dividenden 161 und den Divisor 14. Denn da 7 in 14 ohne Rest enthalten ist, so muß es auch (nach § 28, 3) in 14×11 d. i. in 154 und (nach § 28, 1) in $154 + 7$ d. i. in 161 enthalten sein, also ist 7 ein gemeinschaftliches Maß von 161 und 14, und zugleich das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen, denn da jedes gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen (nach § 28, 2) auch in ihrer Differenz enthalten ist, so muß auch das größte in derselben enthalten sein.

Hat man z. B. das größte gemeinschaftliche Maß von 325 und 247 zu suchen, so dividiere man die größere Zahl durch die kleinere

$$\overbrace{325 : 247}^{1}$$

78

Divisor 247, Rest 78; hier ist das größte gemeinschaftliche Maß noch nicht leicht erkennbar, also sucht man dasselbe auf die nämliche Art für 247 und 78, somit hat man

$$\overbrace{247 : 78}^{3}$$

13

Divisor 78, Rest 13. Der Rest 13 ist aber ein Teiler von 78, also ist 13 für 13 und 78 das größte gemeinschaftliche Maß, somit auch für 78 und 247 und deshalb auch für 325 und 247.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgende Regel:

Es wird das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen auch gefunden, wenn man durch die kleinere Zahl die größere dividiert, durch den erhaltenen Rest den Divisor, u. s. f. immer durch den neuen Rest den vorhergegangenen Divisor, bis kein Rest mehr bleibt; dann ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maß. Ist der letzte Divisor 1, so sind die Zahlen relativ prime Zahlen.

Z. B. Es soll das größte gemeinschaftliche Maß für 888 und 408 gesucht werden.

	2		5		1		2	
888	:	408	:	72	:	48	:	24.
72		48		24		0		

Es ist also 24 das größte gemeinschaftliche Maß für 888 und 408.

Anmerkung. Das vorstehende Verfahren nennt man Ketten-Division. Soll durch dieses Verfahren für drei oder mehrere Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß gesucht werden, so suche man dasselbe zuerst für zwei beliebige dieser Zahlen, am besten für die kleinsten, dann für das gefundene größte gemeinschaftliche Maß und eine der anderen Zahlen u. s. f., bis alle diese Zahlen in Rechnung gebracht sind. — Es seien die gegebenen Zahlen 154, 176 und 319, so hat man:

	1		7	
176	:	154	:	22
22		0		
	14		2	
319	:	22	:	11
99		0		
11		also ist 11 das größte gemeinschaftl. Maß für 154, 176 und 319.		

6. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§ 32.

1) Das Produkt mehrerer Zahlen ist ein Vielfaches von jeder dieser Zahlen. Denn ein Produkt ist durch jeden seiner Faktoren teilbar, also jede dieser Zahlen in dem Produkte als Faktor enthalten.

2) Nach 1) erhält man ein gemeinschaftliches Vielfaches für mehrere Zahlen, wenn man das Produkt derselben herstellt. Dieses gemeinschaftliche Vielfache ist zugleich das kleinste, wenn die ge-

gebenen Zahlen relativ prime Zahlen sind. Ist dies nicht der Fall, so berücksichtige man folgendes:

a) Sind einige der gegebenen Zahlen Teiler von andern, so ist ihr Produkt nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Z. B. für 9, 12 und 36 ist nicht ihr Produkt, sondern 36 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, weil in 36 jede dieser Zahlen enthalten ist; oder für 4, 20, 7, 21 ist 20 × 21 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, weil 4 in 20 und 7 in 21 enthalten ist.

b) Haben zwei oder mehrere der gegebenen Zahlen einen gemeinschaftlichen Teiler, so ist dieser gemeinschaftliche Teiler zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen nur einmal notwendig. Z. B. 6 und 14 haben den gemeinschaftlichen Teiler 2, dieser, mit den nicht gemeinschaftlichen Faktoren multipliziert, gibt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache; 2 in 6 ist 3 mal enthalten,
2 „ 14 „ 7 „ „ mithin
ist das Produkt 2 × 3 × 7 = 42 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache; denn jeder Faktor der gegebenen Zahlen kommt als Faktor in diesem Produkte vor, also ist das Produkt durch jede der gegebenen Zahlen teilbar;

oder: für 9, 15, 22, 77
3 in 9 ist 3 mal
3 „ 15 „ 5 „
11 „ 22 „ 2 „
11 „ 77 „ 7 „ enthalten, also ist
3 × 11 × 3 × 5 × 2 × 7 d. i. 6930 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Bei Berücksichtigung dieser Fälle gründet sich auf die frühern Erklärungen folgendes allgemeine Verfahren für die Herstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen: Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachsten Faktoren und nehme jeden Faktor so oft als Faktor in das gemeinsame Vielfache auf, als er in derjenigen Zahl enthalten ist, in welcher er am öftesten vorkommt. Man erhält z. B. für folgende Zahlen:

4, 6, 15, 20, 30, 35, 42, 64

4 = 2 × 2	30 = 2 × 3 × 5
6 = 2 × 3	35 = 5 × 7
15 = 3 × 5	42 = 2 × 3 × 7
20 = 2 × 2 × 5	64 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2,

also ist der kleinste gemeinschaftliche Dividend 2×2×2×2×2×2×3×5×7 = 6720.

3) Das eben angegebene Verfahren kann auf folgende Weise abgekürzt werden.

a) Zufolge 2, a) dürfen diejenigen Zahlen weggelassen werden, welche Teiler von andern sind.

b) Zufolge 2, b) kann man die gemeinschaftlichen Teiler herausstellen und durch dieselben dividieren, bis man lauter relativ prime Zahlen hat, und das Produkt der letztern mit den (herausgestellten) gemeinschaftlichen Teilern multiplizieren.

Hieraus ergibt sich für die Herstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von zwei oder mehreren Zahlen folgende Regel:

α) Streiche diejenigen Zahlen, welche in andern ohne Rest enthalten sind.

β) Stelle hierauf die gemeinschaftlichen Teiler von zwei oder mehreren der übrigen Zahlen heraus, dividiere durch dieselben und fahre damit so lange fort, bis die erhaltenen Quotienten und die nicht teilbaren Zahlen relativ prime Zahlen sind, [bei dem Herausstellen der gemeinschaftlichen Teiler beginne man mit dem kleinsten derselben].

γ) Multipliziere die herausgestellten gemeinschaftlichen Teiler und die relativ primen Zahlen miteinander. Das erhaltene Produkt ist dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (der kleinste gemeinschaftliche Dividend).

Z. B.	4,	6,	15,	20,	30,	35,	42,	64
	~~4~~,	~~6~~,	~~15~~,	20,	30,	35,	42,	64
2				10,	15,	35,	21,	32
2				~~5~~,	15,	35,	21,	16
3					~~5~~,	35,	~~7~~,	16

also ist 2 × 2 × 3 × 35 × 16 = 6720 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

Vierte Abteilung.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

1. Allgemeine Eigenschaften der Brüche.

§ 33.

1) Wird eine Einheit in mehrere gleiche Teile geteilt, so nennt man einen oder mehrere solche gleiche Teile eine gebrochene Zahl oder einen Bruch. Zu jedem Bruche sind also zwei Zahlen notwendig, eine, welche anzeigt, in wie viele Teile die Einheit geteilt worden ist, und eine, welche anzeigt, wie viele solche Teile genommen werden sollen. Die erste heißt Nenner, die andere Zähler des Bruches.

Man schreibt zuerst den Zähler, unter diesen den Nenner und trennt sie durch einen Strich. Man liest zuerst den Zähler, dann den Nenner und hängt an denselben die Silbe „tel"; z. B. $\frac{3}{4}$, gelesen „drei Viertel", bedeutet, daß die Einheit in vier gleiche Teile geteilt ist, und daß drei solche Teile genommen werden sollen. $\frac{5}{6}$ Stunden, gelesen „fünf Sechstel Stunden", bedeutet, daß die Stunde in sechs gleiche Teile geteilt ist, und daß 5 solche Teile genommen werden sollen; wird die Stunde in sechs gleiche Teile geteilt, so kommen auf einen Teil 10′, also auf 5 Teile 50′, mithin sind $\frac{5}{6}^{h} = 50$ Minuten.

Anmerkung. Im Gegensatze zu den Brüchen nennt man die früher behandelten Zahlen „ganze Zahlen".

§ 34.

1) Die Brüche werden eingeteilt:

a) in uneigentliche, das sind solche, deren Nenner ein Teiler des Zählers ist, z. B. $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{27}{9}$, und

b) in eigentliche, wenn der Nenner kein Teiler des Zählers ist.

Die eigentlichen Brüche werden eingeteilt:

α) in ächte, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, z. B. $\frac{3}{7}$, $\frac{14}{19}$, $\frac{25}{26}$, und

β) in unächte, wenn der Zähler größer ist als der Nenner, z. B. $\frac{3}{2}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{44}{9}$.

Anmerkung. Brüche, deren Zähler 1 ist, während der Nenner von 1 verschieden ist, nennt man gewöhnlich Stammbrüche.

2) Jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, ist gleich 1.

Z. B. $\frac{4}{4} = 1$; denn die Einheit soll in vier gleiche Teile geteilt werden, und vier solche Teile sollen genommen werden, also erhält man wieder die Einheit, nämlich 1.

3) Jeder ächte Bruch ist kleiner als 1, jeder unächte größer als 1; denn beim ächten Bruch hat man weniger Teile, bei dem unächten mehr Teile, als zur Einheit gehören.

4) Ein Ausdruck, welcher die Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche ist, heißt gemischte Zahl, und es ist dabei gebräuchlich, das Additionszeichen weg zu lassen. Z. B. $4\frac{3}{5}$, $1\frac{2}{9}$.

Anmerkung. Der eben angeführte Fall ist der einzige, in welchem man zwischen zwei Ausdrücken, von denen der eine keine dekadische Zahl ist, nicht ein Multiplikationszeichen, sondern das Additionszeichen zu denken hat. Aber auch hier müßte das Additionszeichen gesetzt werden, wenn man die Summanden vertauschen wollte. Also $\frac{3}{5} + 4$; $\frac{2}{9} + 1$.

§ 35.

Jeder Bruch kann als ein Quotient betrachtet werden, dessen Dividend der Zähler, dessen Divisor der Nenner ist.

Z. B. Der Bruch $\frac{7}{9}$ bedeutet, daß die Einheit in 9 gleiche Teile geteilt und 7 solche Teile genommen werden sollen; dasselbe erhält man aber auch, wenn die Zahl 7 (oder eine Größe, welche durch sieben Einheiten ausgedrückt ist, z. B. sieben Meter) in 9 gleiche Teile geteilt und ein Teil davon genommen wird.

Daraus folgt jenes Verfahren, demgemäß der bei einer Division etwa bleibende Rest in Form eines Bruches, dessen Zähler der Rest, dessen Nenner der Divisor ist, zu der beim Dividieren erhaltenen ganzen Zahl gesetzt wird.

Z. B. $129 : 17 = 7\frac{10}{17}$.

§ 36.

1) Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch mit einer beliebigen Zahl als Nenner verwandeln, indem man die gegebene Zahl mit der beliebigen multipliziert und dem erhaltenen Produkte als Zähler die letztere Zahl zum Nenner gibt. Soll z. B. 6 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 5 ist, so hat man:

$$6 = \frac{6 \times 5}{5} = \frac{30}{5};$$

denn ein Ganzes hat 5 Fünftel, also 6 Ganze 6 mal so viel, nämlich 30 Fünftel.

Zusatz. Jede Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist, d. h. $8 = \frac{8}{1}$.

2) Jede gemischte Zahl läßt sich in einen unächten Bruch verwandeln, indem man die Ganzen mit dem Nenner multipliziert, zu diesem Produkte den Zähler addiert und die erhaltene Summe durch den Nenner dividiert.

$$\text{Z. B. } 4\tfrac{3}{5} = \frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5};$$

4 Ganze sind $\frac{20}{5}$, dazu die gegebenen $\frac{3}{5}$ addiert, gibt $\frac{23}{5}$.

3) Jeder unächte Bruch wird in eine gemischte Zahl verwandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert; die erhaltene ganze Zahl gibt die Ganzen, der Rest den Zähler des Bruches, dessen Nenner der gegebene Nenner ist.

Z. B. $\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$.

6 Sechstel geben ein Ganzes, daher geben 24 Sechstel 4 Ganze, somit bleiben als Rest $\frac{5}{6}$.

§ 37.

1) Von mehreren Brüchen, welche denselben Nenner haben, ist derjenige der größte, welcher den größten Zähler hat. Z. B. von den Brüchen: $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{12}{5}$ ist der letzte, nämlich $\frac{12}{5}$, der größte; denn da die Brüche gleiche Nenner haben, so ist überall die Einheit in gleich viele unter sich gleiche Teile geteilt, es sind also alle diese Teile unter sich gleich, mithin ist derjenige Bruch der größte, welcher die größte Anzahl solcher Teile enthält, das ist derjenige, welcher den größten Zähler hat.

2) Von mehreren Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner hat. Z. B. von den Brüchen: $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{7}{20}$ ist $\frac{7}{3}$ der größte; denn die Zähler sind alle gleich, also enthält jeder Bruch gleich viele Teile, nämlich 7, es hängt also die Größe der Brüche von der Größe der Teile ab; in je weniger gleiche Teile aber das Ganze geteilt wird, desto größer ist ein Teil, demnach ist unter den oben angegebenen Brüchen derjenige der größte, welcher den kleinsten Nenner hat.

3) Um Brüche mit verschiedenen Nennern und Zählern zu vergleichen, müssen dieselben auf gleiche Nenner (Benennung) gebracht werden.

2. Erweitern und Kürzen der Brüche.

§ 38.

Ein Bruch bleibt seinem Werte nach ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Z. B. $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$.

Durch die Multiplikation des Zählers mit 3 ist der Bruch 3 mal so groß geworden, denn er hat jetzt dreimal so viele Teile; durch die Multiplikation des Nenners mit 3 wird aber ein jeder Teil des neuen Bruches der dritte Teil des früheren, weil das Ganze jetzt in 3 mal so viele Teile geteilt ist, also hat man in dem neuen Bruche 3 mal so viele Teile, von welchen Teilen aber jeder der dritte Teil des früheren Stammbruches ist, mithin sind die beiden Brüche ihren Werten nach gleich. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes erklärt, denn

$$\frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}.$$

Die erste dieser Veränderungen heißt Erweitern, die zweite Kürzen (Reduzieren, Verkleinern) der Brüche.

Durch das Erweitern ist man in den Stand gesetzt, einen Bruch in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem gegebenen Nenner ist, indem man durch den gegebenen Nenner den neuen dividiert und mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler und Nenner des Bruches multipliziert.

Z. B. Es soll $\frac{7}{13}$ in einen andern Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 65 ist.

13 in 65 ist 5 mal enthalten, also hat man:

$$\frac{7}{13} = \frac{7 \times 5}{13 \times 5} = \frac{35}{65}.$$

Auf dieselbe Weise können mehrere Brüche auf denselben Nenner (Benennung) gebracht werden, wenn man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner sucht, durch jeden Nenner dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache [hier allgemeiner Nenner genannt] dividiert und mit dem Quotienten den entsprechenden Zähler (und Nenner) multipliziert.

Z. B. Für $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{30}$ hat man

2	4, 6, 15 30
	2 15

$2 \times 2 \times 15 = 60.$

4 in 60 ist 15 mal enthalten, $15 \times 3 = 45$
6 " " " 10 " " $10 \times 5 = 50$
15 " " " 4 " " $4 \times 7 = 28$
30 " " " 2 " " $2 \times 11 = 22$

somit erhält man $\frac{45}{60}$, $\frac{50}{60}$, $\frac{28}{60}$, $\frac{22}{60}$.

Anmerkung. Brüche auf denselben Nenner bringen heißt sie gleichnamig machen.

3. Addieren und Subtrahieren der Brüche.

§ 39.

1) Brüche, welche denselben Nenner haben, werden addiert, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4 + 6 + 8}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

Da die Brüche denselben Nenner haben, so sind die Teile einander gleich, können also addiert werden; der erste Bruch enthält 4, der zweite 6 und der dritte 8 solche gleiche Teile, also hat man im Ganzen 18 Teile, jeder derselben ist ein Neuntel, folglich erhält man $\frac{18}{9}$.

2) Brüche, welche verschiedene Nenner haben, müssen zuerst gleichnamig gemacht werden, und dann können sie (nach 1) addiert werden.

Z. B. a) $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ können nicht ohne vorhergehende Umformung addiert werden, weil die Teile, auf welche sich diese Brüche beziehen, verschieden sind; es sind aber $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ und $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$, also $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{24}{30} + \frac{25}{30} = \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}$.

b) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{15} + \frac{11}{10} + \frac{19}{40} + \frac{1}{6}$

2	8	12	15	10	40	6
2		6	15		20	
5		3	15		10	
			3		2	

$2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2 = 120$

$$\text{Summe} = \frac{45 + 50 + 56 + 132 + 57 + 20}{120} = \frac{360}{120} = 3.$$

3) Gemischte Zahlen werden addiert, indem

man zur Summe aus den darin enthaltenen ganzen Zahlen die Summe der Brüche addiert.

Z. B. $1\frac{5}{8} + 3 + 2\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = (1 + 3 + 2) + \frac{5 + 7 + 2}{8}$
$= 6\frac{14}{8} = 7\frac{3}{4}$.

4) Ehe man den allgemeinen Nenner bestimmt, untersuche man, ob die Brüche gekürzt werden können, und wenn unächte Brüche dabei sind, so verwandle man dieselben zuerst in gemischte Zahlen.

Z. B. $4\frac{35}{150} + \frac{18}{12} + \frac{22}{70} + 3\frac{4}{15} + \frac{46}{20} + \frac{27}{70}$
$= 4\frac{7}{30} + 1\frac{1}{2} + \frac{11}{35} + 3\frac{4}{15} + 2\frac{3}{10} + \frac{27}{70}$

$$\begin{array}{r|llllll} 2 & 30, & 2, & 35, & 15, & 10, & 70 \\ 5 & 15 & & & & & 35 \\ & 3 & & & & & 7 \end{array}$$

$2 \times 5 \times 3 \times 7 = 210$

Summe $= 10\,\frac{49 + 105 + 66 + 56 + 63 + 81}{210} = 10\frac{420}{210} = 12$.

5) Brüche, welche denselben Nenner haben, werden subtrahiert, indem man vom Zähler des Minuenden den Zähler des Subtrahenden subtrahiert und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{11 - 5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. (Erklärung wie bei 1.)

6) Brüche, welche verschiedene Nenner haben, werden zuerst gleichnamig gemacht und dann (nach 5) subtrahiert.

Z. B. $\frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{15 - 4}{24} = \frac{11}{24}$.

7) Ist der Minuend eine ganze Zahl, oder bei gemischten Zahlen der Zähler des Subtrahenden größer als jener des Minuenden, so nehme man von den vorhandenen Ganzen des Minuenden 1, verwandle dieses in Bruchteile, welche im zweiten Falle zum Zähler des Minuenden addiert werden, und subtrahiere.

Z. B. $4 - \frac{3}{8} = 3\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 3\frac{5}{8}$;
oder $3\frac{2}{9} - 1\frac{8}{15} = 2\,\frac{10 - 24}{45} = 1\,\frac{55 - 24}{45} = 1\frac{31}{45}$.

Anmerkung. Bei allen Operationen [Rechnungsarten] mit Brüchen wird vorausgesetzt, daß dieselben vorher auf die einfachste Form gebracht [möglichst gekürzt] worden seien.

4. Multiplizieren und Dividieren der Brüche.

§ 40.

1) **Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner ungeändert läßt.**

Z. B. $7 \times \frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{6} = \frac{35}{6}$;

denn die Aufgabe: 7 mit $\frac{5}{6}$ zu multiplizieren verlangt, daß 5 Teile, wovon jeder ein Sechstel ist, 7mal genommen werden sollen, somit erhält man 35 solche Teile, also $\frac{35}{6}$.

Ist die Zahl ein Teiler vom Nenner, oder haben die Zahl und der Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird zuerst die Multiplikation bloß angezeigt, der dadurch erhaltene Bruch (nach § 38) gekürzt und hierauf erst die Multiplikation ausgeführt.

Z. B. $3 \times \frac{5}{9} = \frac{\not{3} \times 5}{\not{9}\ 3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, oder

$$10 \times \frac{7}{12} = \frac{\not{10} \times 7 \cdot 5}{\not{12}\ 6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}.$$

Soll eine gemischte Zahl multipliziert werden, so multipliziere man (nach § 11, 2) sowohl die Ganzen als auch den Bruch und addiere die erhaltenen Produkte.

Z. B. a) $8 \times 5\frac{3}{7} = 8 \times 5 + 8 \times \frac{3}{7} = 40 + \frac{24}{7} = 43\frac{3}{7}$.

b) $6 \times 3\frac{2}{9} = 6 \times 3 + 6 \times \frac{2}{9} = 18 + \frac{\not{6} \times 2 \cdot 2}{\not{9} \cdot 3}$

$= 18 + \frac{4}{3} = 19\frac{1}{3}$.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß dasselbe Resultat erhalten wird, wenn man vor der Ausführung der Multiplikation die gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandelt.

2) **Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.**

Z. B. $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$.

$\frac{4}{5} : 3$ bedeutet, daß $\frac{4}{5}$ in 3 gleiche Teile geteilt und ein solcher Teil genommen werden, also $\frac{4}{5}$ drei mal so klein werden

soll; multipliziert man daher den Nenner mit 3, so ist die Einheit in 3mal so viele Teile geteilt, also ein Teil 3mal so klein, mithin, da der Zähler ungeändert bleibt, ist der Bruch $\frac{4}{15}$ der dritte Teil von $\frac{4}{5}$, es ist demnach durch 3 dividiert.

Ist die Zahl ein Teiler vom Zähler, oder haben Zahl und Zähler einen gemeinschaftlichen Teiler, so wird zuerst die Multiplikation bloß angezeigt, sodann (nach § 38) gekürzt und erst hierauf die Multiplikation ausgeführt.

Z. B. $\frac{4}{9} : 2 = \frac{\cancel{4}\ 2}{9 \times \cancel{2}} = \frac{2}{9}$;

oder $\frac{10}{17} : 15 = \frac{\cancel{10}\ 2}{17 \times \cancel{15}\ 3} = \frac{2}{51}$.

Soll eine gemischte Zahl dividiert werden, so dividiere man (nach § 14, 2) sowohl die ganze Zahl als auch den Bruch und addiere die erhaltenen Quotienten.

Z. B. a) $6\frac{9}{11} : 3 = \frac{6}{3} + \frac{9}{11} : 3 = 2 + \frac{\cancel{9}\ 3}{11 \times \cancel{3}} = 2\frac{3}{11}$.

b) $9\frac{2}{3} : 5 = \frac{9}{5} + \frac{2}{3} : 5 = 1\frac{4}{5} + \frac{2}{15} = 1\frac{12 + 2}{15} = 1\frac{14}{15}$.

Anmerkung. Auch hier kann man, wie bei der Multiplikation, vor Ausführung der Division die gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandeln.

3) Zwei oder mehrere Brüche werden multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{5 \times 4}{7 \times 9} = \frac{20}{63}$;

denn multipliziert man den Zähler des Bruches $\frac{5}{7}$ mit 4, so ist das Resultat $\frac{20}{7}$ das 9fache des verlangten, weil nicht mit 4, sondern nur mit dem 9. Teile von 4 multipliziert werden soll, es muß also von $\frac{20}{7}$ der 9. Teil genommen, d. h. durch 9 dividiert werden, was (nach 2) dadurch geschieht, daß man den Nenner mit 9 multipliziert, also hat man $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{63}$.

Haben der Zähler des einen Bruches und der Nenner des andern einen gemeinschaftlichen Teiler, so zeige man die Multiplikation zuerst bloß an und kürze.

Z. B. $\frac{7}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{7 \times 9 \;\; 3}{15 \times 14 \;\; 2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$,

oder: $\frac{4}{9} \times \frac{6}{25} \times \frac{45}{32} = \frac{4 \times 6 \times 45 \cdot 5 \cdot 3}{9 \times 25 \times 32 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 4} = \frac{3}{20}$.

Hat man gemischte Zahlen zu multiplizieren, so verwandle man sie vorher in unächte Brüche.

Z. B. $4\frac{5}{18} \times 1\frac{5}{22} \times \frac{8}{21} = \frac{77 \times 27 \times 8 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 9}{18 \times 22 \times 21 \,.\, 2 \,.\, 7 \,.\, 2} = 2$.

4) *Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit dem Dividenden den umgekehrten Divisor* (in welchem der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler gemacht wurde) *multipliziert.*

Z. B. $\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$,

denn dividiert man $\frac{4}{5}$ durch 3, was $\frac{4}{15}$ gibt, so ist dieser Bruch der 7. Teil des gesuchten, weil nicht durch 3, sondern bloß durch den 7. Teil von 3 dividiert werden soll, $\frac{4}{15}$ muß also 7 mal so groß gemacht, d. h. mit 7 multipliziert werden, was (nach 1) dadurch geschieht, daß man den Zähler multipliziert.

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiert werden, so kann man der Zahl den Nenner 1 geben und dann die vorhergehende Regel anwenden.

Z. B. $6 : \frac{11}{7} = \frac{6}{1} : \frac{11}{7} = \frac{6 \times 7}{11} = \frac{42}{11} = 3\frac{9}{11}$.

Auch hier kürze man vor Ausführung der Multiplikation, wenn es möglich ist.

Sind gemischte Zahlen zu dividieren, so verwandle man sie vorher in unächte Brüche.

Z. B. $3\frac{3}{5} : \frac{9}{10} = \frac{18 \times 10 \,.\, 2 \,.\, 2}{5 \times 9} = 4$.

Fünfte Abteilung.

Das Rechnen mit Decimalbrüchen.

1. Erklärungen.

§ 41.

Betrachtet man eine beliebige mehrziffrige Zahl, z. B. 4728, welche nach der Erklärung vom Decimalsystem gleich ist: 4000 + 700 + 20 + 8 oder 4 × 1000 + 7 × 100 + 2 × 10 + 8, so sieht man, daß die Einheit einer jeden folgenden Ziffer, wenn man von links nach rechts geht, den zehnten Teil des Wertes der vorausgehenden erhält. Setzt man eine Zifferreihe über die Einerstellen hinaus nach rechts fort, nachdem man nach der Einerstelle ein Komma oder einen Punkt gemacht hat, so muß, wenn man dasselbe Princip gelten lassen will, die Einheit der ersten Ziffer nach dem Komma den zehnten Teil des Wertes der vorausgehenden d. h. der Einer erhalten, also $\frac{1}{10}$ sein, die Einheit der zweiten Stelle $\frac{1}{100}$, jene der dritten Stelle $\frac{1}{1000}$ u. s. f. sein, d. h. die Einheit jeder folgenden Stelle muß der zehnte Teil von jener der unmittelbar vorhergehenden sein. Es bedeuten also die nach dem Komma folgenden Ziffern Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 oder überhaupt eine mit 1 und lauter Nullen geschriebene Zahl ist. Solche Brüche heißen **Decimalbrüche**, und die Ziffern nach dem Komma (ihre Zähler) **Decimalen**.

Das Wesen der Decimalbrüche ist demnach in unserem (dekadischen) Zahlensysteme begründet.

1. Anmerkung. Sind keine Ganzen vorhanden, so schreibt man an ihre Stelle eine Null, ebenso werden die vor der ersten (links stehenden) geltenden Ziffer fehlenden Decimalen durch Nullen angezeigt.

2. Anmerkung. Im Gegensatze zu den Decimalbrüchen nennt man die früher behandelten Brüche **gemeine** Brüche.

Nach obiger Erklärung ist also

$6{,}493 = 6 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$ (1) oder, wenn man addiert

$= 6\frac{493}{1000}$ (2) oder auch

$= \frac{6493}{1000}$ (3)

$25{,}40207 = 25 + \frac{4}{10} + \frac{2}{1000} + \frac{7}{100000}$ (1) oder, wenn man addiert,

$= 25\frac{40207}{100000}$ (2) oder auch

$= \frac{2540207}{100000}$ (3)

Aus diesen Beispielen geht hervor, daß jeder Decimalbruch auf dreifache Art ausgesprochen werden kann, und zwar:

I) indem man zuerst die Ganzen liest und dann jede einzelne Decimale mit ihrem Nenner, wie in dem

1. Beispiele (1) 6 Ganze, 4 Zehntel, 9 Hundertel und 3 Tausendtel
2. „ (1) 25 „ 4 „ 2 „
und 7 Hunderttausendtel:

II) indem man die Ganzen für sich, dann sämmtliche Decimalen zusammen als den Zähler eines Bruches liest, dessen Nenner mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als Decimalstellen vorhanden sind, daher dem Nenner der letzten Decimalstelle gleich ist, also im

1. Beispiele (2) 6 Ganze und 493 Tausendtel
2. „ (2) 25 „ „ 40207 Hunderttausendtel; endlich

III) wenn man die Ganzen und Decimalen als eine Zahl, und zwar als Zähler eines Bruches liest, dessen Nenner gleich jenem der letzten Decimalstelle ist, wie im

1. Beispiele (3) 6493 Tausendtel
2. „ (3) 2540207 Hunderttausendtel.

Für das Anschreiben der Decimalbrüche hat man Folgendes zu merken:

Werden dieselben nach II) gelesen, so schreibe man zuerst die Ganzen, setze nach denselben das Komma, und dann den Zähler des Bruches, wobei nicht zu übersehen ist, daß der Decimalbruch so viele Decimalstellen haben muß, als der Nenner Nullen enthält. Die fehlenden Stellen sind dann durch Nullen zu ergänzen.

Wird aber der Decimalbruch nach III gelesen, so schreibe man zuerst den Zähler des Bruches und schneide dann von rechts nach links so viele Ziffern als Decimalen ab, als der Nenner Nullen enthält.

Aus diesen Beispielen folgt zugleich, wie man jeden Decimalbruch in Form eines gemeinen Bruches schreiben kann, nämlich:

1) indem man zuerst die Ganzen anschreibt und den Decimalen als Zähler jenen Nenner gibt, welcher mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als Decimalstellen vorhanden sind, oder

2) indem man das Komma wegläßt und der dadurch erhaltenen ganzen Zahl jenen Nenner gibt, welcher wie in 1) gebildet ist.

Z. B. a) $4{,}763 = 4\frac{763}{1000}$ oder $= \frac{4763}{1000}$;

b) $4{,}00072 = 4\frac{72}{100000}$ oder $= \frac{400072}{100000}$;

c) $0{,}0246 = \frac{246}{10000}$.

Ein Decimalbruch bleibt seinem Werte nach ungeändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt oder wegläßt.

Z. B. 0,043 = 0,04300;

denn hängt man dem Bruche, wie hier geschehen, zwei Nullen an, so erhält dadurch der Bruch zwei Decimalstellen mehr, also auch der Nenner ebenso viele Nullen mehr, man hat demnach jetzt $\frac{4300}{100000}$, während man vorhin $\frac{43}{1000}$ hatte, welche beiden Brüche einander gleich sind.

Es läßt sich also jede ganze Zahl als Decimalbruch darstellen, wenn man nach der ganzen Zahl ein Komma macht und Nullen als Decimalen anhängt.

2. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

§ 42.

Sollen gemeine Brüche von einfachster Form in Decimalbrüche verwandelt werden, so hat man die gemeinen Brüche in andere Brüche umzuformen, deren Nenner 10, 100, 1000 oder überhaupt eine Zahl ist, welche nur mit 1 und angehängten Nullen geschrieben wird. Nach § 38 ist z. B.

$$\tfrac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \tfrac{5}{10} = 0{,}5;$$

$$\tfrac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \tfrac{25}{100} = 0{,}25;$$

$$\tfrac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \tfrac{375}{1000} = 0{,}375;$$

$$\tfrac{7}{625} = \frac{7 \times 16}{625 \times 16} = \tfrac{112}{10000} = 0{,}0112.$$

Dieses Verfahren ist aber nur anwendbar für solche Nenner, welche Teiler sind von 10, 100, 1000 2c., welche also keinen andern einfachen Faktor enthalten als 2 und 5; denn da 10, 100, 1000 u. s. f. selbst nur die einfachen Teiler 2 und 5 haben, so können nur solche Zahlen Teiler davon sein, deren einfache Faktoren 2 und 5 sind; so kann z. B. 6 in keiner der Zahlen 10, 100 2c. ohne Rest enthalten sein, weil 6 den Teiler 3 hat, und 3 kein Teiler der Zahlen 10, 100 2c. ist. Es ist demnach ein anderes Verfahren notwendig, welches für jeden Nenner giltig ist.

Ist z. B. $\frac{7}{16}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, so ist $\frac{7}{16} = \frac{70}{16 \times 10}$ (indem Zähler und Nenner mit 10 multipliziert werden); dividiert man nun 70 zuerst durch 16, so muß man das Resultat noch durch 10 dividieren (§ 14, 6); man hat also, da 70 durch 16 dividiert den Quotienten 4 und den Rest 6 gibt, wenn man Quotient und Rest noch durch 10 dividiert:

$$\frac{7}{16} = \frac{70}{16 \times 10} = \frac{4 \times 16 + 6}{16 \times 10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{16 \times 10};$$

es ist aber, wenn man wieder mit 10 erweitert:

$$\frac{6}{16 \times 10} = \frac{60}{16 \times 100};$$

16 in 60 ist 3 mal enthalten, und es bleibt der Rest 12, also wenn Quotient und Rest noch durch 100 dividiert werden:

$$\frac{6}{16 \times 10} = \frac{60}{16 \times 100} = \frac{3 \times 16 + 12}{16 \times 100} = \frac{3}{100} + \frac{12}{16 \times 100}.$$

Nun ist ferner $\frac{12}{16 \times 100} = \frac{120}{16 \times 1000};$

16 in 120 ist 7 mal enthalten, dabei bleibt der Rest 8; wird dann noch durch 1000 dividiert, so erhält man:

$$\frac{12}{16 \times 100} = \frac{120}{16 \times 1000} = \frac{7}{1000} + \frac{8}{16 \times 1000};$$

endlich ist $\frac{8}{16 \times 1000} = \frac{80}{16 \times 10000};$

16 in 80 ist 5 mal ohne Rest enthalten, daher ist:

$$\frac{8}{16 \times 1000} = \frac{80}{16 \times 10000} = \frac{5}{10000};$$

folglich ist $\frac{7}{16} = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{5}{10000} = 0{,}4375.$

Dieses Verfahren wird dadurch abgekürzt, daß man bloß dem Zähler eine Null anhängt, durch den Nenner dividiert und den erhaltenen Quotienten an die Stelle der Zehntel schreibt, ferner dem Reste wieder eine Null anhängt, durch den Nenner dividiert, den Quotienten an die Stelle der Hundertel schreibt und in dieser Weise fortfährt.

Z. B. $\frac{5}{12} = 0{,}4166\ \ldots$

20	12 in 50 ist 4mal enthalten mit dem Reste 2
80	„ „ 20 „ 1mal „ „ „ „ 8
8	„ „ 80 „ 6mal „ „ „ „ 8

Es bleibt nun immer derselbe Rest, mithin erhält man immer denselben Quotienten, und die Decimale 6 wiederholt sich ohne Ende, was mit dem früher Gesagten übereinstimmt, weil 12 den Faktor 3 enthält, der in keiner der Zahlen 10, 100, 1000 ꝛc. ohne Rest enthalten ist. Es gibt also der gemeine Bruch $\frac{5}{12}$ einen Decimalbruch, dessen Decimalen ohne Ende fortgehen. Der Wert dieses gemeinen Bruches kann daher nie genau durch einen Decimalbruch dargestellt werden, jedoch kann man diesem Werte um so näher kommen, je mehr Decimalen man nimmt.

Solche Decimalbrüche heißen unendliche Decimalbrüche, und alle diejenigen auf die einfachste Form gebrachten gemeinen Brüche geben solche unendliche Decimalbrüche, deren Nenner sich nicht in lauter Faktoren 2 und 5 zerlegen lassen (einen anderen Primfaktor als 2 oder 5 haben).

Aus dem Vorhergehenden folgt als Regel für das Verwandeln eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch:

Man dividiere den Zähler durch den Nenner, wodurch die Ganzen erhalten werden; hänge an den Rest eine Null und dividiere wieder durch den Nenner, der erhaltene Quotient gibt die Zehntel; hänge hierauf an den Rest wieder eine Null, dividiere abermals durch den Nenner, wodurch die Hundertel erhalten werden, und fahre so fort, bis entweder der Rest 0 wird, oder bis ein Rest zum Vorschein kommt, der schon vorgekommen ist.

Die Decimalen, welche sich bei einem unendlichen Decimalbruche wiederholen, heißen die Periode, weßhalb diese Decimalbrüche auch periodische genannt werden. Die Periode wird gewöhnlich 2mal geschrieben, worauf dann einige Punkte folgen.

Die periodischen Decimalbrüche zerfallen:

1) in rein periodische, wenn die Periode unmittelbar nach dem Komma beginnt; z. B. 0,33 . . .; 0,476476 . . . .; 9,0303 . . . .

2) in unrein (gemischt) periodische, wenn der Periode noch andere Decimalstellen vorausgehen;

z. B. 64,0329329 . . . . die Periode ist 329; oder
0,2054307307 . . . . die Periode ist 307.

Die größte mögliche Anzahl der Stellen einer Periode ist um 1 kleiner als die Menge der Einheiten des Nenners vom gegebenen gemeinen Bruche; denn verwandelt man z. B. $\frac{1}{7}$ in einen Decimal-

bruch, so kann als Rest nur 1, 2, 3, 4, 5, 6 vorkommen, also sind, wenn man Nullen anhängt und dividiert, nur 6 verschiedene Quotienten möglich, nach welchen dann einer der schon vorhergegangenen Reste folgen muß, wie in unserem Beispiele:

$\frac{3}{7} = 0{,}428571$
30
20
60
40
50
10
3

es folgt also wieder 3 als Rest, mithin wiederholt sich die Periode 428571, somit ist $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571 \ldots$

1. Anmerkung. Im Gegensatze zu den unendlichen Decimalbrüchen nennt man die übrigen endliche.

2. Anmerkung. Aus dem Vorstehenden in Verbindung mit einer einfachen Ueberlegung ergibt sich auch folgendes:

Ein gemeiner Bruch von der einfachsten Form gibt

a) einen endlichen Decimalbruch, wenn sein Nenner keinen andern einfachen Faktor als 2 und 5 enthält,

b) einen reinperiodischen Decimalbruch, wenn sein Nenner weder 2 noch 5 als Faktor enthält,

c) einen gemischt periodischen Decimalbruch, wenn sein Nenner neben anderen einfachen Faktoren auch 2 oder 5 enthält. (In diesem Falle kann man den gemeinen Bruch als Summe oder Differenz zweier Brüche darstellen, von welchen der eine im Nenner nur 2 und 5 als einfache Faktoren enthält, während der Nenner des andern keinen dieser Faktoren enthält.)

3. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

§ 43.

Decimalbrüche werden addiert (oder subtrahiert), indem man die gleichnamigen Stellen (Stellen von gleichem Lokalwert) wie bei ganzen Zahlen addiert (oder subtrahiert) und das Komma an jene Stelle schreibt, an welcher es bei den Summanden steht. Sind die gegebenen Brüche nicht gleichnamig (§ 38 Anmerk.), so kann man sie durch Anhängen von Nullen gleichnamig machen.

Z. B. 1) $64{,}037 + 2{,}8953 + 0{,}98736$

$$\begin{aligned} &= 64{,}03700 \\ &+ 2{,}89530 \\ &+ 0{,}98736 \\ \hline &= 67{,}91966 \end{aligned}$$

2) 980,375 — 109,8436
= 980,3750
= 109,8436
= 870,5314

Das Verfahren ergibt sich aus dem dekadischen Zahlensystem.

4. Multiplikation der Dezimalbrüche.

§ 44.

1) Soll ein Decimalbruch mit 10 multipliziert werden, z. B. 4,823 mit 10, so erhält jede Stelle desselben einen 10mal so großen Wert; es werden demnach die Hundertel Zehntel, die Zehntel Einer u. s. f., was dadurch erreicht wird, daß man das Komma um eine Stelle nach rechts rückt, mithin ist

$$10 \times 4{,}823 = 48{,}23.$$

Hat man mit 1000 zu multiplizieren, z. B. 1000 × 98,03, so erhält jede Stelle einen 1000mal so großen Wert, die Hundertel werden also Zehner u. s. f., was dadurch geschieht, daß man das Komma um 3 Stellen nach rechts rückt, wobei aber im vorstehenden Beispiele, da bloß 2 Decimalstellen gegeben sind, eine Null angehängt werden muß, somit ist

$$1000 \times 98{,}03 = 98030.$$

Hieraus folgt die Regel:

Decimalbrüche werden mit 10, 100, 1000 oder überhaupt mit einer Zahl multipliziert, welche nur mit 1 und rechts angehängten Nullen geschrieben wird, indem man das Komma um so viele Stellen nach rechts rückt, als der Multiplikator Nullen hat, die rechts fehlenden Stellen sind durch Nullen zu ergänzen.

2) Sind zwei Dezimalbrüche mit einander zu multiplizieren, z. B. 4,302 × 0,0045, so erhält man, wenn sie in gemeine Brüche verwandelt werden:

$$4{,}302 \times 0{,}0045 = \frac{4302}{1000} \times \frac{45}{10000} = \frac{4302 \times 45}{1000 \times 10000} = \frac{193590}{10000000}$$

$$= 0{,}019359$$

oder $$6{,}002 \times 0{,}403 = \frac{6002}{1000} \times \frac{403}{1000} = \frac{6002 \times 403}{100000}$$

$$= \frac{2418806}{1000000} = 2{,}418806.$$

Vergleicht man diese beiden Aufgaben, so findet man, daß das Resultat als ein gemeiner Bruch erhalten wurde, dessen Zähler das Produkt der beiden Decimalbrüche mit Hinweglassung des Komma ist, dessen Nenner aber mit 1 und so vielen Nullen geschrieben wird, als die beiden gegebenen Decimalbrüche zusammen Decimalstellen haben, so daß man im Zähler von rechts nach links so viele Stellen als Decimalen abzuschneiden hat, als die beiden Faktoren zusammen Decimalstellen haben, wodurch das Produkt als ein Decimalbruch erhalten wird. Daher erhält man die Regel:

Decimalbrüche werden multipliziert, indem man ohne Rücksicht auf das Komma [wie bei ganzen Zahlen] multipliziert und von dem dadurch erhaltenen Produkte von rechts nach links so viele Stellen als Decimalen abschneidet, als die beiden Faktoren zusammen Decimalstellen haben.

z. B. 0,000273 × 25 = 0,006825
273 × 25 = 6825
oder 9,204 × 0,04 = 0,36816
9204 × 4 = 36816.

Anmerkung. Da jede ganze Zahl als ein Decimalbruch betrachtet werden kann, dessen Decimalen sämmtlich Nullen sind, so ist in dem Vorhergehenden auch die Regel für die Multiplikation eines Decimalbruches mit einer ganzen Zahl enthalten. (Erstes der unmittelbar vorhergehenden Beispiele.)

5. Division der Decimalbrüche.

§ 45.

1) Soll ein Decimalbruch durch 10 dividiert werden, z. B. 64,93 durch 10, so erhält (nach § 14, 2) jede Stelle den zehnten Teil des früheren Wertes, aus den Hundertern werden Zehner, aus den Zehnern Einer, aus den Einern Zehntel u. s. f., so daß man nur das Komma um eine Stelle nach links zu rücken braucht, also hat man

64,93 : 10 = 6,493.

Aehnlich ist es, wenn der Divisor 100, 1000 2c. ist; z. B. 4,302 : 1000; da hier jede Stelle den tausendsten Theil des früheren Wertes erhalten muß, so daß die Einer Tausendtel, die Zehntel Zehntausendel 2c. werden, so hat man das Komma um 3 Stellen, d. i. um so viel, als der Divisor Nullen hat, nach links zu rücken, und erhält:

4,302 : 1000 = 0,004302.

Daraus folgt die Regel:

Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000 rc. dividiert, indem man das Komma um so viele Stellen nach links rückt, als der Divisor Nullen enthält.

2) Es sei ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, z. B. 47,28 durch 4, so hat man: 4 in 47 ist 11 mal enthalten und es bleibt der Rest 3, man hat daher im Quotienten 11 Ganze; den Rest 3 Einer verwandelt man in 30 Zehntel und addiert dazu die schon vorhandenen 2, was 32 Zehntel gibt, 4 in 32 ist 8 mal enthalten, da aber Zehntel dividiert wurden, so ist der Lokalwert dieser Stelle im Quotienten Zehntel; endlich 4 in 8 ist 2 mal enthalten; da der Dividend 8 Hundertel ist, so ist der Quotient 2 ebenfalls durch Hundertel ausgedrückt, somit hat man:

47,28 : 4 = 11,82;

oder 0,0046 : 5

5 ist in 0 Einern 0 mal enthalten,
5 „ „ 0 Zehnteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 0 Hunderteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 4 Tausendteln 0 mal enthalten,
5 „ „ 46 Zehntausendteln 9 mal enthalten, mit dem Reste 1
5 „ „ 10 Hunderttausendteln 2 mal enthalten, mithin

0,0046 : 5 = 0,00092.

Hieraus folgt die Regel:

Um einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, dividiere man zuerst die Ganzen, setze das Komma und zu dem Reste die Zehntel. Hierauf dividiere man den so erhaltenen Ausdruck und verfahre mit den Hunderteln, Tausendteln rc. wie mit den Zehnteln bis zur letzten Decimalstelle; bleibt dann ein Rest, so hänge man demselben eine Null an, und verfahre im Folgenden ebenso wie bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch. (§ 42.)

Z. B. a) 482,0532 : 6 = 80,3422
b) 0,00074624 : 11 = 0,00006784
c) 2,47 : 3 = 0,8233 . . .

3) Hat man durch einen Decimalbruch zu dividieren, wie z. B. 4,736 : 0,04, so kann man diesen Fall auf den vorhergehenden dadurch zurückführen, daß man den Dividenden und den Divisor

mit 100 multipliciert, wodurch der Wert des Quotienten nicht geändert wird, man erhält daher (nach § 44, 1)

$$4{,}736 : 0{,}04 = \frac{473{,}6}{4} = 118{,}4;$$

oder 170,343 : 0,00243

Da hier der Divisor fünf Decimalstellen hat, so muß man Dividend und Divisor mit 100000 multiplizieren oder, was dasselbe ist, im Dividend und Divisor das Komma um fünf Stellen nach rechts rücken, wodurch man erhält:

$$170{,}343 : 0{,}00243 = \frac{17034300}{243} = 70100$$

Daher hat man die Regel:

Um durch einen Decimalbruch zu dividieren, rücke man im Dividend und Divisor das Komma um so viele Stellen nach rechts, als der Divisor Decimalstellen enthält. Dadurch ist diese Aufgabe auf die unmittelbar vorhergehende zurückgeführt.

Z. B. a) $24{,}15 : 0{,}23 = \frac{2415}{23} = 1{,}05;$

b) $6520{,}5 : 3{,}15 = \frac{652050}{315} = 2070;$

c) $24{,}037 : 0{,}03 = \frac{2403{,}7}{3} = 801{,}233\ldots$

Anmerkung. Man kann auch alle Aufgaben über die Division mit Decimalbrüchen dadurch lösen, daß man zuerst Dividend und Divisor gleichnamig macht und dann wie bei ganzen Zahlen dividiert.

---

6. Verwandlung der unendlichen*) Decimalbrüche in gemeine Brüche.

§ 46.

1) Es sei der rein periodische Decimalbruch 0,376376... gegeben. Multipliziert man denselben mit 1000, so erhält man 376,376 . . . ., von diesem Produkte den gegebenen Decimalbruch, subtrahiert, gibt die Differenz

376,376, ... — 0,376 . . . . = 376 (da die Decimalstellen gleich sind, so fallen sie weg).

Diese Differenz 376 ist das 999fache des gegebenen Decimalbruches; denn von dem 1000fachen des gegebenen Bruches wurde das 1fache subtrahiert, folglich bleibt das 999fache. Um daraus

*) Für die Verwandlung der endlichen Decimalbrüche in gemeine Brüche genügt, was (gegen Ende des § 41 Seite 58—59) über das Anschreiben eines (endlichen) Decimalbruches gesagt wurde.

den Wert des gegebenen Bruches zu erhalten, hat man durch 999 zu dividieren und es ist:

$$0{,}376376\ldots. = \frac{376}{999};$$

oder hat man den Decimalbruch 0,00420042 ....

so ist das 10000fache = 42,0042 ....

und „ 1 „ = 0,0042 ....

somit das 9999fache = 42, folglich das

$$1\text{fache} = \frac{42}{9999};$$

$$\text{daher ist } 0{,}00420042\ldots. = \frac{42}{9999} = \frac{14}{3333};$$

Aus vorstehenden Beispielen folgt die Regel:

Jeder rein periodische Decimalbruch wird dadurch in einen gemeinen Bruch verwandelt, daß man die Periode als Zähler eines Bruches anschreibt und ihr jenen Nenner gibt, der mit so vielen Neunern geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Z. B. a) $4{,}333\ldots. = 4\frac{3}{9} = 4\frac{1}{3}$;

b) $0{,}0202\ldots = \frac{2}{99}$;

c) $68{,}301301\ldots = 68\frac{301}{999}$.

2) Ist der Decimalbruch ein gemischt periodischer; z. B. 0,352727 ...., so ist

das 10000fache desselben 3527,27 ...

100 „ „ 35,27 ....

subtrahiert man das 100fache von dem 10000fachen, so bleibt das 9900fache, und die Differenz der Produkte, da die Decimalstellen wieder sämmtlich wegfallen, ist 3527 — 35, somit das Einfache der 9900. Teil, also

$$0{,}352727\ldots. = \frac{3527-35}{9900} = \frac{3492}{9900} = \frac{97}{275};$$

oder, wenn 0,04302302 .... gegeben ist, so ist

das 100000fache = 4302,302 ....

„ 100fache = 4,302 ....

also das 99900fache = 4302 — 4 und

$$\text{das } 1\text{fache} = \frac{4302-4}{99900};$$

somit ist

$$0{,}04302302\ldots. = \frac{4302-4}{99900} = \frac{4298}{99900} = \frac{2149}{49950}.$$

Aus dem Vorstehenden ergibt sich folgende Regel:

Jeder gemischt periodische Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die der Periode vorausgehenden Stellen mit der Periode zusammen als eine ganze Zahl betrachtet, davon die der Periode vorausgehenden Stellen [ebenfalls als ganze Zahl] subtrahiert, und der erhaltenen Differenz als Zähler eines Bruches jenen Nenner gibt, welcher mit so vielen Neunern geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat, mit so vielen angehängten Nullen, als der Periode Decimalstellen vorangehen.

Z. B. a) $460{,}0063131 \ldots = 460\,\frac{631 - 6}{99000}$

$= 460\frac{625}{99000} = 460\frac{5}{792}$;

b) $0{,}321405405 \ldots = \frac{321405 - 321}{999000} = \frac{321084}{999000}$

$= \frac{2973}{9250}$.

---

7. Abgekürztes Rechnen mit Decimalbrüchen.

A. Erklärung.

§ 47.

Will man von dem Decimalbruche 4,2568 keine Zifferstelle von geringerem Stellenwerte als Tausendtel in Rechnung bringen, so wird man statt seiner 4,257 setzen, weil, nachdem man einmal auf vollständige Genauigkeit verzichtet hat, der Fehler bei dieser Substitution geringer ist, als wenn man 4,256 gesetzt hätte. Denn im ersten Falle hat man 2 Zehntausendtel zu viel, im zweiten aber hätte man 8 Zehntausendtel zu wenig genommen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Regel:

Wenn von einem Decimalbruche nicht sämmtliche Stellen in die Rechnung genommen werden sollen, so wird die letzte beibehaltene Decimale um eine Einheit erhöht, wenn die nächst folgende (erste weggelassene) Decimale größer ist als 4.

Diese Erhöhung bezeichnet man mit dem Namen Correktur.

B. Addition und Subtraktion.

§ 48.

1) Sollen für die Summe der Decimalbrüche:

$$4{,}72819 + 0{,}052764 + 0{,}004146 + 6{,}8259$$

nur jene Decimalen in Rechnung gezogen werden, welche einen höheren Wert als die Zehntausendtel haben, so erhält man durch die Correktur:

$$4{,}728 + 0{,}053 + 0{,}004 + 6{,}826 = 11{,}611.$$

Anmerkung. Da der Fehler bei jedem Summanden höchstens 5 Einheiten der ersten weggelassenen Decimalstelle betragen kann, so findet man den größten Fehler, welcher im Resultate enthalten sein kann, indem man fünf Einheiten der ersten weggelassenen Decimalstelle mit der Anzahl der Summanden multipliziert. Dabei versteht es sich von selbst einerseits, daß der Fehler ebensowohl in Vergrößerung als in Verkleinerung des Resultates bestehen kann, sowie anderseits, daß die Fehler, welche bei den einzelnen Summanden gemacht wurden, sich gegenseitig mehr oder weniger, in einzelnen Fällen (wie im obigen Beispiele) aber auch ganz aufheben können.

2) Sollen für die Differenz

$$8{,}70996 - 4{,}055431$$

nur jene Stellen in Rechnung gezogen werden, welche einen höheren Wert als die Zehntausendtel haben, so erhält man

$$8{,}710 - 4{,}055 = 4{,}655.$$

1. Anmerkung. Da der Fehler bei Minuend und Subtrahend jedesmal höchstens fünf Einheiten der ersten weggelassenen Stelle betragen kann, und diese Fehler, wenn sie in demselben Sinne gemacht wurden, sich aufheben oder wenigstens vermindern, im entgegengesetzten Falle aber sich addieren, so beträgt der größte Fehler, welcher hier vorkommen kann, weniger als eine Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle.

2. Anmerkung. Aus den beiden vorhergehenden Anmerkungen folgt, daß, wenn man bei der Subtraktion eine bestimmte Stelle als letzte mit der größten möglichen Genauigkeit erhalten will, noch die nächst niedrigere in Rechnung gezogen werden muß, während es bei der Addition von der Anzahl der Summanden abhängt, wie viele Stellen man mehr in Rechnung ziehen muß, als man im Resultate mit Genauigkeit erhalten will.

3. Anmerkung. Aus dem Vorhergehenden folgt auch, daß die Nullen am Ende eines Decimalbruches eine Bedeutung haben können und (im Gegensatze zu § 41, Ende) nicht weggelassen werden dürfen, wenn man dadurch andeuten will, daß sich die Genauigkeit der Angabe bis auf die betreffende Decimalstelle erstreckt.

C. Multiplikation.

§ 49.

Wird ein abgekürzter Decimalbruch mit einer ganzen Zahl

multipliziert, so ergibt sich der größte Fehler, welcher dabei auftreten kann, aus dem in der Anmerkung zu 1) des vorigen Paragraphen Gesagten.

Das Verfahren für die abgekürzte Multiplikation von Decimalbrüchen ergibt sich aus folgendem Beispiele:

Das Produkt 7,2531 × 42,35649 soll auf drei Decimalstellen berechnet werden.

42,35649 mit den 7 Einern des Multiplikators multipliziert gibt fünf Decimalstellen, drei davon sind bloß notwendig, man braucht daher mit 7 nur 42,356 zu multiplizieren; der Multiplikand mit der zweiten Ziffer des Multiplikators, nämlich mit 2 Zehnteln multipliziert gibt sechs Decimalstellen, also sind hier drei Stellen überflüssig, daher darf man mit 2 bloß 42,35 multiplizieren, der ganze Multiplikand mit der folgenden Stelle des Multiplikators, nämlich mit 5 Hunderteln multipliziert, würde sieben Decimalstellen geben, also hat man nur 42,3 zu multiplizieren und überhaupt für jede folgende Ziffer des Multiplikators immer um eine Stelle weniger im Multiplikand zu nehmen.

Hat man demnach den Multiplikator so unter den Multiplikand geschrieben, daß die Einer (7) unter 6, die Zehntel (2) unter 5, die Hundertel (5) unter 3 kommen u. s. f., so beginne man die Multiplikation mit jener Ziffer des Multiplikanden, welche über derjenigen Ziffer des Multiplikators steht, mit welcher man multipliziert. Da nun jedes Teilprodukt so viele Decimalstellen hat als verlangt sind, so schreibe man die letzten Stellen unter einander. Ehe man jedoch die einzelnen Produkte entwickelt, multipliziere man mit jeder Ziffer des Multiplikators die rechts von der über ihr stehende des Multiplikanden, schreibe das erhaltene Produkt aber nicht an, sondern zähle bloß die Zehner der erhaltenen zweizifferigen Zahl zu dem nachfolgenden Produkte, und berücksichtige dabei die Regel, welche im § 47 gegeben wurde.

Man hat demnach:

1) 42,35649 × 7,2531

42,35649		
13 527		
296 495	. . . . 7 × 4 = 28,	Correktur 3
8 471	. . . . 2 × 6 = 12,	„ 1
2 118	. . . . 5 × 5 = 25,	„ 3
127	. . . . 3 × 3 = 9,	„ 1
4		
307,215		

2) 45,0379 × 258,2435 für 3 Decimalen

45,03790		
53 42852		
90 07580		
22 51895		
360303	8 × 9 = 72,	Correktur 7
9007	2 × 7 = 14,	" 1
1801	4 × 3 = 12,	" 1
135		
23	5 × 5 = 25,	" 3
11630,744		

3) 1425,021 × 0,0435 für 2 Stellen

1425,021		
534		
5700		
428 . . .	3 × 5 = 15	Correktur 2
71 . . .	5 × 2 = 10	" 1
61,99		

Es folgt hieraus für die abgekürzte Multiplikation der Decimalbrüche die Regel:

Man schreibe die Einer des Multiplikators unter diejenige Stelle des Multiplikanden, mit welcher das Produkt abgebrochen werden soll, setze die Zehner, Hunderter 2c. 2c. nach rechts, die Zehntel, Hundertel 2c. 2c. nach links unter die folgenden Stellen des Multiplikanden, so daß der Multiplikator in umgekehrter Ordnung angeschrieben ist. Hierauf werden die Teilprodukte gebildet, indem man mit jeder Ziffer des Multiplikators multipliziert. Dabei wird aber nicht der ganze Multiplikand multipliziert, sondern es wird mit jener Ziffer desselben begonnen, welche über derjenigen Ziffer des Multiplikators steht, mit welcher eben multipliziert wird. Sodann wird nach links fortgefahren, und die rechts folgende Ziffer des Multiplikanden zur Correktur benützt. Die Teilprodukte werden unter einander geschrieben, wie die Summanden bei der Addition von ganzen Zahlen und dann in der Summe so viele Decimalstellen abgeschnitten, als von vornherein verlangt sind.

Anmerkung. Ungeachtet der Correktur kann die letzte Stelle des

Resultates ungenau sein (der Fehler beträgt dabei niemals so viele Einheiten der letzten Ziffernstelle des Resultates als die Anzahl der Ziffernstellen des Multiplikators); will man dieselbe genau erhalten, so entwickelt man eine (eventuell zwei) Decimalstelle(n) mehr, als verlangt werden; sind z. B im Produkte vier Stellen verlangt, so rechne man, als ob fünf gefordert wären.

D. Division.

§ 50.

1) Auch beim Dividieren von Decimalbrüchen kann man abkürzen, nachdem man sämmtliche Ziffernstellen des Dividenden nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren in Rechnung gebracht hat und zwar dadurch, daß man anstatt dem Reste eine Null anzuhängen im Divisor die letzte Stelle rechts wegstreicht u. s. f. für die weiteren Divisionen, wobei jedoch beim Multiplizieren die Correktur (nach dem vorhergehenden §) berücksichtigt werden muß.

Z. B. a) 4,630285 : 0,0473
= 46302,85 : 473 = 97,8918, wofür aber, weil die
3732 — nächste Ziffer größer als
4218 — 4 werden würde (§ 47),
4345 — 97,8919 zu schreiben ist.
88 : 47(3)
41 : 4(7)

b) 53,02 : 0,589234
= 53020000 : 589234 = 89,98123
5881280
578174 : 58923(4)
530311 . . . . 9 × 4 = 36, Correktur 4.
47863 : 5892(3)
47138 . . . . 8 × 3 = 24, Correktur 2
725 : 589(2)
589
136 : 58(9)
118 . . . . 2 × 9 = 18, Correktur 2
18 : 5(8)

2) Soll der Quotient nur bis auf eine bestimmte Stelle gesucht werden, so ist es manchmal nicht notwendig, alle Ziffern des Dividenden und Divisors in Rechnung zu ziehen. Aus den vorhergehenden Beispielen ergibt sich nämlich, daß bei dem Abstreichen

der Ziffern des Divisors durch die Division mit der höchsten Stelle des Divisors die letzte Stelle des Quotienten, durch die Division mit den beiden höchsten Stellen des Divisors die vorletzte Stelle des Quotienten erhalten wird, u. s. f. Bestimmt man also für den Quotienten zuerst die Anzahl der Zifferstellen vor dem Komma und addiert zu dieser die Anzahl der verlangten Decimalstellen, so erhält man die Anzahl der für die Rechnung notwendigen Stellen für den Divisor und ebenso für den Dividenden.

Soll z. B. in der Aufgabe 928,73954 : 9,35876 der Quotient bis auf Tausendtel gesucht werden, so sieht man, daß die erste Stelle des Quotienten Zehner gibt, also erhält man zwei Stellen vor dem Komma, dazu drei Decimalstellen gibt fünf Ziffern für den Divisor und, weil 92 die Zahl 93 nicht als Summand enthält, sechs Ziffern für den Dividenden. Daher hat man:

928740 :	9358,7(6)	= 99,238	für 99,237 (nach 1) a)
86452	9 × 6	= 54,	Correktur 5
2224	9 × 7	= 63,	„ 6
352	2 × 8	= 16,	„ 2
71	3 × 5	= 15,	„ 2

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich für die abgekürzte Division der Brüche folgende Regel:

Man bestimme, wie viele Zifferstellen der Quotient vor dem Komma erhält, und zähle dazu die Anzahl der zu suchenden Decimalstellen. Dadurch erhält man die Anzahl der für die Rechnung notwendigen Stellen des Divisors. Der Dividend hat entweder ebenso viele Stellen oder um eine mehr, je nachdem der Divisor in der Zahl, welche aus der gleichen Anzahl von Ziffern des Dividenden (von links nach rechts gezählt) gebildet wird, enthalten ist oder nicht. Hierauf dividiere man, streiche nach jeder Division die letzte Ziffer des vorigen Divisors weg und bringe **jedesmal** die Correktur in Rechnung. Erhält der Quotient keine Ziffer vor dem Komma, so muß die Anzahl der in demselben unmittelbar nach dem Komma folgenden Nullen von jener der gewünschten Decimalstellen subtrahiert werden, um die Anzahl der für den Divisor notwendigen Zifferstellen zu erhalten.

Z. B. a) Es soll der Quotient 7,2 : 0,4287655 auf Hundertel berechnet werden.

Die höchste Ziffer des Quotienten gibt Zehner, man erhält daher 2 Ziffern vor dem Komma und eben so viele nach demselben. Es sind daher für den Divisor vier Ziffern, und, weil 4 in 7 enthalten ist, ebenso viele für den Dividenden notwendig. Die Rechnung erhält demnach folgende Form:

7200 : 428,7(6) = 16,79
2912   1 × 6 = 6, Correktur 1
340   6 × 7 = 42, „ 4
40   7 × 8 = 56, „ 6
2   9 × 2 = 18, „ 2

b) Es soll der Quotient 4536,3295 : 82,35 auf Zehntausendtel berechnet werden.

Man erhält hier im Quotienten vor dem Komma zwei Stellen und vier nach demselben. Es sind daher vom Divisor sechs, und, weil 8 in 4 nicht enthalten ist, vom Dividenden sieben Ziffern in die Rechnung aufzunehmen. Weil aber der Divisor nur vier Ziffern enthält, so sind entweder demselben zwei Nullen anzuhängen, oder es ist das Abstreichen erst zu beginnen, nachdem drei Stellen des Quotienten gefunden sind. Man erhält daher:

453633,0 : 8235 = 55,0859 wofür (nach 1) a) 55,0860
41883   zu schreiben ist. (§ 48 Anm. 3.)
7080
492   8 × 5 = 40, Correktur 4
80   5 × 3 = 15, „ 2
6   9 × 2 = 18, „ 2

c) Der Quotient 4,2 : 5173 soll auf fünf Decimalstellen entwickelt werden.

Hier kommt die erste geltende Ziffer des Quotienten an die Stelle der Zehntausendtel zu stehen, folglich sind nur zwei Stellen des Divisors und drei des Dividenden in Rechnung zu ziehen.

0,0420 : 51(7) = 0,00081.

1. Anmerkung. Da man nicht nur jeden Quotienten aus Decimalbrüchen durch einen solchen aus ganzen Zahlen ersetzen kann, sondern auch umgekehrt (§ 38), so ist leicht einzusehen, daß das Verfahren der abgekürzten Division nicht auf Decimalbrüche beschränkt ist, sondern überall mit Vorteil angewendet werden kann, wo der Quotient weder eine ganze Zahl noch einen endlichen Decimalbruch gibt, oder auch, wo nach der Natur der Aufgabe nur die Kenntnis einer Anzahl von Zifferstellen erwünscht ist, welche kleiner ist als jene Anzahl, welche sich durch das vollständige Divisionsverfahren ergibt.

2. Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß man mit unendlichen Decimalbrüchen nur nach dem in vorstehenden Paragraphen entwickelten Verfahren

rechnen kann, sowie daß die Anzahl der für das Resultat zu fordernden Stellen bei jeder Rechnung mit benannten Zahlen von der Natur der Aufgabe abhängt. So z. B. würde man, wenn das Resultat die Benennung Mark hätte, für dasselbe höchstens zwei Decimalstellen berechnen. Denn bei Berücksichtigung der Correktur kann der Fehler, welcher durch Weglassung der dritten Decimalstelle entsteht, höchstens fünf Tausendtel betragen. Nun sind aber $^5/_{1000}$ ℳ = $^{500}/_{1000}$ ₰ = $^1/_2$ ₰, ein Betrag, welcher wegen des Fehlens einer solchen Münze im Leben keine Berücksichtigung finden kann.

Sechste Abteilung.

Schluß-Rechnung.

1. Einfache Regeldetri.

§ 51.

1) Hängt eine Größe von einer andern so ab, daß ein Vielfaches der einen dem gleichen Vielfachen der andern entspricht, so heißen die beiden Größen gerade oder direkt proportional.

Z. B. Wenn 1 ℔ einer Ware 24 Pf. kostet,
so kosten 2 ℔ dieser Ware 2 × 24 Pf. = 48 Pf.
3 ℔ „ „ 3 × 24 Pf. = 72 Pf. u. s. f.

oder, wenn 100 ℳ Kapital 5 ℳ Zins tragen, so erhält man von 1000 ℳ Kapital 10 × 5 ℳ = 50 ℳ Zins u. s. f.

Direkt proportional sind demnach:
Gewicht und Preis einer Ware,
Kapital und Zinsen,
Arbeitskräfte und geleistete Arbeit 2c.

Entspricht aber ein vielfaches der einen Größe dem ebenso vielten Teile der andern, so heißen diese Größen indirekt oder umgekehrt proportional.

Z. B. Wenn 1 Arbeiter zu einer gewissen Arbeit 60 Tage braucht,
so brauchen 2 „ „ derselben „ $\frac{60}{2}$ Tage = 30 Tg.
3 „ „ „ „ $\frac{60}{3}$ „ = 20 Tg.

u. s. f. (bis zu einer gewissen Grenze); oder: Wenn mit einem gewissen Vorrat 100 Mann 30 Tage leben können, so reichen
200 „ $\frac{30}{2}$ „ = 15 Tage
1000 „ $\frac{30}{10}$ „ = 3 „ u. s. f.

Demnach sind indirekt proportional:

Zahl der Arbeiter und Zeit, in welcher eine Arbeit fertig wird,

" " Consumenten und Zeit, in welcher ein Vorrat verzehrt wird u. s. f.

Anmerkung. Es gibt Größen, welche von einander abhängen, jedoch nicht auf eine der beiden besprochenen Arten, z. B. die Anzahl der angespannten Pferde und der in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Weg, die Tiefe eines Brunnens und Zeit der Vollendung, Zeit und Weg beim Fallen eines Körpers; Höhe eines Berges und Barometerstand auf demselben 2c. 2c.

2) Sind zwei zusammengehörige Werte proportionaler Größen, dann ein beliebiger Wert der einen Größe gegeben, und soll der entsprechende Wert für die andere Größe gesucht werden, so heißt die Aufgabe eine einfache Regeldetri-Aufgabe (**regula de tribus terminis.**)

Z. B. 7 ℔ einer Ware kosten 2 ℳ, was kosten 56 ℔ dieser Ware?

Die beiden zusammengehörigen Werte sind 7 ℔ und 2 ℳ, der beliebige Wert der einen 56 ℔; der entsprechende Wert für die andere Größe soll gesucht werden, und kann mit x bezeichnet werden; oder:

100 Mann reichen mit einem bestimmten Vorrate 40 Tage; wie lange werden 400 Mann mit demselben Vorrate reichen?

100 Mann und 40 Tage sind die zusammengehörigen Werte, 400 Mann der beliebige Wert der einen, x Tage der entsprechende Wert der andern Größe.

Jede Regeldetri-Aufgabe besteht aus zwei Teilen, nämlich aus einem Bedingungssatze und einem Fragesatze. Den Bedingungssatz bilden die beiden bekannten zusammengehörigen Werte, der Fragesatz enthält den beliebigen Wert der einen und den entsprechenden gesuchten Wert der andern Größe, also ist in den obigen Aufgaben:

In der ersten

der Bedingungssatz: 7 ℔ kosten 2 ℳ

der Fragesatz: 56 ℔ " x "

In der zweiten

Bedingungssatz: 100 Mann reichen 40 Tage.

Fragesatz: 400 " " x "

Anmerkung. Bei jeder Regeldetri-Aufgabe müssen alle Nebenumstände, welche im Bedingungs- und Fragesatze nicht erwähnt sind, als gleich vorausgesetzt werden.

2. Lösung der Regeldetri-Aufgaben durch Schlüsse.

§ 52.

Es seien folgende Aufgaben gegeben:

1) Von einer Ware kosten 45 ℔ 420 ℳ, wie hoch kommen 33 ℔?

Bedingungssatz: 45 ℔ kosten 420 ℳ
Fragesatz: 33 ℔ " x ℳ

Wenn 45 ℔ 420 ℳ kosten, so muß 1 ℔ den 45. Teil von 420 ℳ kosten, nämlich $\frac{420}{45}$ ℳ, also 33 ℔ 33mal so viel, d. i.

$$x = \frac{420}{45} \times 33 = \frac{420 \times 33}{45} \frac{28 \cdot 11}{3} = 308 \text{ (ℳ)}$$

2) Zu einem Baue brauchen 24 Mann 28 Tage, wie lange werden 14 Mann dazu brauchen?

Bedingungssatz: 24 Mann brauchen 28 Tage.
Fragesatz: 14 " " x Tage.

Wenn 24 Mann 28 Tage brauchen, so würde ein Mann, da derselbe den 24. Teil leistet, 24mal so lang arbeiten müssen, d. h. er würde 24 × 28 Tage brauchen, 14 Mann dagegen brauchen den 14. Teil der Zeit, somit brauchen 14 Mann

$$x = \frac{24 \times 28}{14} = 24 \times 2 = 48 \text{ (Tage)}.$$

3) Ein Kapital von 1300 Mark ist zu 5% ausgeliehen, was betragen die jährlichen Zinsen?

Bedingungssatz: 100 Mark Kapital tragen 5 ℳ Zinsen.
Fragesatz: 1300 " " " x ℳ "

Wenn 100 Mark Kapital 5 Mark Zinsen tragen, so würde 1 Mark Kapital den hundertsten Teil, d. h. $\frac{5}{100}$ Mark (= 5 Pf.) Zinsen, und 1300 Mark Kapital 1300 mal so viel tragen, und man hat

$$x = \frac{5 \times 1300}{100} = 5 \times 13 = 65 \text{ (Mark)}$$

Aus diesen drei Aufgaben ist ersichtlich, daß man von der bekannten Größe für eine bestimmte Mehrheit auf jene, welche der Einheit entspricht, und von der für die Einheit gefundenen Zahl auf die verlangte Mehr-

heit überzugehen hat. Dieses geschieht durch Multiplikation oder Division, was in jedem einzelnen Falle leicht zu finden ist.

Anmerkung. Um von einer Mehrheit auf eine andere überzugehen, ist es nicht immer notwendig, inzwischen auf die Einheit zu schließen. Wenn nämlich die beiden Mehrheiten einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so wählt man am besten diesen selbst zum Uebergange, besonders beim Kopfrechnen. So oben im Beispiel 1) 3 Pfund, im Beispiel 2) 2 Mann, im Beispiel 3) wird man unmittelbar von einhundert auf dreizehnhundert schließen.

3. Zusammengesetzte Regeldetri.

§ 53.

Hat man es mit mehr als 2 proportionalen Größen zu thun, so muß die einfache Regeldetri mehrmals angewendet werden, und die Aufgabe heißt eine zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe (regula quinque, septem etc.) (terminorum).

Z. B. 1) 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 20 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wie lange würden 20 Arbeiter, die täglich $7\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, zu dieser Arbeit brauchen?

Bedingungssatz:	12 Arbeiter,	10 Stunden tägl.,	20 Tage.
Fragesatz:	20 „	$7\frac{1}{2}$ „ „	x „

12 Arbeiter brauchen 20 Tage, also 1 Arbeiter 12 mal so viel, nämlich 12×20 Tage, und 20 Arbeiter den 20. Teil der Zeit d. i. $\frac{12 \times 20}{20}$; so viele Tage brauchen aber 20 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; wenn sie aber täglich nur 1 Stunde arbeiten, so brauchen sie 10mal so viel Zeit, d. i. $\frac{12 \times 20}{20} \times 10$ Tage, und wenn sie $7\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, $7\frac{1}{2}$mal weniger Zeit; mithin ist

$$x = \frac{12 \times 20 \times 10 \,.\, 2}{20 \times 15} = 16 \text{ (Tage)}.$$

2) 25 Mann können in 6 Tagen, wenn sie täglich 11 Stunden arbeiten, einen Graben auswerfen. Wie viele Arbeiter wären notwendig, wenn ein gleich großer Graben in 10 Tagen bei täglich 9stündiger Arbeitszeit ausgeworfen werden sollte, aber in einem Erdreiche, wo 5 cbm Erde auszuwerfen eben so viel Zeit erfordert, als im anderen Erdreich 6 cbm?

Bedingungssatz: 25 Mann, 6 Tage, 11 Stunden täglich, 6 cbm.
Fragesatz: x „ 10 „ 9 „ „ 5 cbm.

Soll der Graben in sechs Tagen fertig werden, so braucht man 25 Mann, wenn er aber in einem Tage fertig werden soll, 6mal so viel, also 6 × 25 und in 10 Tagen den 10. Teil, d. i. $\frac{6 \times 25}{10}$; so viele Arbeiter sind nothwendig, wenn täglich 11 Stunden gearbeitet wird. Es sind bei einer Stunde Arbeitszeit 11mal so viel, und bei 9 Stunden der 9. Teil notwendig, also $\frac{6 \times 25 \times 11}{10 \times 9}$; so viele Arbeiter braucht man, wenn in einer bestimmten Zeit 6 cbm Erde ausgeworfen werden; wird aber in derselben Zeit nur 1 cbm ausgeworfen, so sind 6mal so viele Arbeiter, und wenn 5 cbm ausgeworfen werden, der 5. Teil notwendig. Man hat daher

$$x = \frac{6 \times 25 \times 11 \times 6}{10 \times 9 \times 5} = 22 \text{ (Arbeiter).}$$

3) Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 2100 Mark in 12 Jahren, wenn 150 Mark Kapital in 7 Jahren 42 Mark Zinsen tragen?

Bedingungssatz: 150 ℳ Kapital, 7 Jahre, 42 ℳ Zinsen
Fragesatz: 2100 „ „ 12 „ x „ „

150 ℳ Kapital tragen 42 ℳ Zinsen, also 1 ℳ Kapital $\frac{42}{150}$ ℳ in sieben Jahren, folglich in einem Jahre $\frac{42}{150}$: 7, dann tragen 2100 ℳ Kapital in einem Jahre $\frac{42 \times 2100}{150 \times 7}$ ℳ und in 12 Jahren $\frac{42 \times 2100 \times 12}{150 \times 7} = 1008$ (Mark).

Die zusammengesetzten Regeldetri-Aufgaben werden also ebenso wie die einfachen gelöst, indem man von der Mehrheit des Bedingungs-Satzes auf die Einheit und von dieser auf die Mehrheit des Fragesatzes übergeht.

Siebente Abteilung.

A. Von den Proportionen.

§ 54.

1) Sind vier Zahlen so beschaffen, daß der Quotient aus einem Paare derselben dem Quotienten aus dem andern Paare gleich ist, so sagt man, die vier Zahlen stehen in Proportion. Z. B. aus den vier Zahlen 12, 6, 14, 7 lassen sich die beiden gleichen Quotienten 12 : 6 und 14 : 7 bilden, also stehen diese vier Zahlen in Proportion.

Man schreibt: 12 : 6 = 14 : 7 und liest: 12 verhält sich zu 6, wie 14 zu 7, d. h. ist der erste Dividend doppelt so groß als der erste Divisor, so muß der zweite Dividend auch das Doppelte des zweiten Divisors sein. Eine Proportion ist also die Gleichsetzung (Gleichung) zweier gleicher Quotienten.

Die in Proportion stehenden vier Zahlen heißen Glieder der Proportion.

Anmerkung. Man nennt auch die Gleichsetzung zweier gleicher Differenzen eine Proportion, und zwar im Gegensatze zu der eben erklärten, welche dann eine geometrische genannt wird, eine arithmetische.

2) Jeden dieser Quotienten nennt man ein Verhältnis, und zwar nennt man den Dividenden das Vorderglied, den Divisor das Hinterglied; es sind also in jeder Proportion das 1. und 3. Glied die Vorderglieder, das 2. u. 4. Glied die Hinterglieder.

1. Zusatz. Ist das Vorderglied eines Verhältnisses größer als das Hinterglied, so nennt man das Verhältnis fallend, im entgegengesetzten Falle steigend.

2. Zusatz. Ein steigendes Verhältnis ist (als ein ächter Bruch) kleiner als 1, ein fallendes (als unächter Bruch) größer als 1.

3) Das 1. und 4. Glied einer Proportion werden äußere, das 2. und 3. innere oder mittlere Glieder genannt.

Die beiden Vorderglieder und ebenso die beiden Hinterglieder heißen auch homologe oder gleichnamige Glieder.

4) Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, so heißt die Proportion stetig, außerdem diskret.

Z. B. 9 : 36 = 36 : 144 ist eine stetige Proportion, die in 1) angeführte ist eine diskrete.

1. Anmerkung. Das vierte Glied einer diskreten Proportion heißt vierte, das letzte Glied einer stetigen Proportion dritte, und das mittlere Glied einer stetigen Proportion mittlere Proportionale zu den übrigen Gliedern.

2. Anmerkung. Die mittlere Proportionale bei einer stetigen arithmetischen Proportion nennt man auch arithmetisches, bei einer geometrischen, geometrisches Mittel.

3. Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß das arithmetische Mittel für zwei Zahlen die halbe Summe derselben ist. Analog spricht man auch von einem arithmetischen Mittel, Durchschnitts- oder Mittelwerte für mehrere Zahlen und versteht darunter den Quotienten aus der Summe dieser Zahlen und ihrer Anzahl.

§ 55.

Multipliziert man in einer Proportion den Dividenden des ersten Quotienten mit dem Divisor des zweiten, und den Dividenden des 2. Quotienten mit dem Divisor des 1., so sind diese beiden Produkte einander gleich. Denn nach der Erklärung vom Dividieren ist jeder Dividend gleich dem Produkte aus dem Divisor und dem Quotienten; wird also der Dividend des 1. Quotienten mit dem Divisor des 2. multipliziert, so erhält man ein Produkt, das gleich ist dem Produkte aus folgenden drei Faktoren: aus dem 1. Quotienten, dem Divisor des 1. und dem Divisor des 2. Quotienten. — Das Produkt aus dem Dividenden des 2. und dem Divisor des 1. Quotienten ist aber aus demselben Grunde gleich dem Produkte aus folgenden 3 Faktoren: aus dem 2. Quotienten, dem Divisor des 2. und dem Divisor des 1. Die beiden Quotienten sind, weil sie eine Proportion bilden, einander gleich, also auch die beiden Produkte, weil sie aus gleichen Faktoren gebildet sind. Wird nun auf obige Benennung Rücksicht genommen, so heißt der oben angeführte für die Proportionslehre sehr wichtige Satz:

In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren.

Z. B. für $4 : 20 = 7 : 35$

ist $4 \times 35 = 20 \times 7$

Zusatz. Aus dem vorstehenden Satze folgt umgekehrt:

Aus zwei gleichen Produkten von je zwei Faktoren kann man eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produktes zu äußeren, diejenigen des anderen zu inneren Gliedern macht.

Z. B. aus $7 \times 9 = 3 \times 21$

folgt $7 : 3 = 21 : 9$

§ 56.

Ist in einer Proportion irgend ein Glied unbekannt, welches wir mit irgend einem Buchstaben wie x, y, z bezeichnen wollen, so kann dasselbe mittelst des im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satzes auf die folgende Weise gefunden werden.

Hat man z. B.

a) $4 : 16 = 6 : x$, so muß

$4 \times x = 16 \times 6$ sein, d. h. das vierfache des gesuchten Gliedes ist gleich dem Produkte 16×6, folglich das Glied selbst der vierte Teil von 16×6, also ist

$$x = \frac{16 \times 6}{4} = 24.$$

b) $3 : x = 7 : 35$, so ist wieder

$7 \times x = 3 \times 35$, d. h. das siebenfache des gesuchten Gliedes ist 3×35, also das gesuchte Glied selbst der siebente Teil von 3×35, somit $x = \frac{3 \times 35}{7} = 15$.

Vergleicht man diese beiden Resultate, so folgt die Regel:

In jeder Proportion wird ein äußeres Glied gefunden, indem man das Produkt der inneren Glieder durch das bekannte äußere dividiert; dagegen ein inneres Glied, indem man das Produkt der äußeren durch das bekannte innere dividiert.

§ 57.

Da (nach § 55) eine Proportion richtig ist, so lange das Produkt der äußeren Glieder jenem der inneren gleich ist, so darf man folgende Vertauschungen der Glieder vornehmen:

a) In jeder Proportion darf man die inneren Glieder und ebenso auch die äußeren vertauschen [permutieren].

Z. B. 2 : 10 = 3 : 15 gibt auch
2 : 3 = 10 : 15, oder
15 : 10 = 3 : 2, oder endlich
15 : 3 = 10 : 2.

b) In jeder Proportion darf man gleichzeitig beide Verhältnisse umkehren [invertieren], d. h. in jedem Verhältnisse Vorderglied und Hinterglied vertauschen.

Z. B. 3 : 21 = 11 : 77, gibt auch
21 : 3 = 77 : 11.

Zusatz. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß vier verschiedene, in Proportion stehende Zahlen wie 2, 6, 5 und 15, acht Proportionen geben, nämlich

2 : 6 = 5 : 15	6 : 2 = 15 : 5
2 : 5 = 6 : 15	6 : 15 = 2 : 5
15 : 6 = 5 : 2	5 : 2 = 15 : 6
15 : 5 = 6 : 2	5 : 15 = 2 : 6

§ 58.

Aus dem im vorhergehenden Paragraphen angeführten Grunde darf man die Glieder jeder Proportion auf folgende Weise ändern:

a) In jeder Proportion darf man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren.

Z. B. 6 : 24 = 2 : 8; das 1. und 2. Glied durch 6 dividiert, gibt:
1 : 4 = 2 : 8, oder das 1. u. 3. „ „ 2 „ „
3 : 24 = 1 : 8; „ 2. u. 4. „ mit 5 multipliziert „
6 : 120 = 2 : 40 u. s. f.

b) In jeder Proportion darf man alle vier Glieder mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren.

Z. B. 9 : 45 = 6 : 30; jedes Glied durch 3 dividiert gibt:
3 : 15 = 2 : 10; „ „ mit 2 multipliziert gibt:
18 : 90 = 12 : 60.

Anmerkung. Mit Hilfe dieser beiden Regeln lassen sich Proportionen vereinfachen, namentlich können dadurch die Brüche entfernt werden.

Z. B. a) $\frac{7}{6} : \frac{5}{9} = 6 : x$; das 1. und 2. Glied mit 18 multipliziert gibt:
21 : 10 = 6 : x.

b) $\frac{7}{15} : \frac{9}{10} = \frac{4}{3} : \frac{18}{7}$; das 1. und 2. Glied mit 30, das 3. und 4. mit 21 multipliziert gibt:
14 : 27 = 28 : 54.

§ 59.

Aus den beiden Proportionen

$$\begin{array}{l} 4 : 8 = 5 : 10 \text{ und} \\ 7 : 21 = 3 : 9 \text{ folgt:} \\ \hline 4 \times 10 = 8 \times 5 \text{ und} \\ 7 \times 9 = 21 \times 3. \end{array}$$

Werden nun die unter einander stehenden Produkte mit einander multipliziert, so müssen die neu erhaltenen Produkte einander gleich sein, weil die Faktoren gleich sind, somit hat man:
$4 \times 10 \times 7 \times 9 = 8 \times 5 \times 21 \times 3$ oder (§ 11. Anmk.)
$(4 \times 7) \times (10 \times 9) = (8 \times 21) \times (5 \times 3)$
und daraus (nach § 55, Zus.):

$$(4 \times 7) : (8 \times 21) = (5 \times 3) : (10 \times 9),$$

d. h. wenn man diese Proportionen mit den beiden gegebenen vergleicht:

Aus zwei Proportionen läßt sich eine neue bilden, wenn man die einander entsprechenden Glieder multipliziert.

Dieses gilt ebenso für mehrere Proportionen, und die neu erhaltene Proportion heißt in beiden Fällen eine zusammengesetzte.

Z. B. die Proportionen

$$\begin{array}{l} 5 : 15 = 2 : 6 \\ \frac{3}{5} : \frac{1}{8} = 7 : \frac{35}{24} \\ 1 : 16 = 3 : 48 \text{ geben:} \\ \hline (5 \times \frac{3}{5} \times 1) : (15 \times \frac{1}{8} \times 16) = (2 \times 7 \times 3) : (6 \times \frac{35}{24} \times 48) \\ 3 : 30 = 42 : 420 \end{array}$$

1. Zusatz. Soll aus zwei Proportionen, welche ein gleiches Glied haben, eine zusammengesetzte Proportion gebildet werden, so kann man die beiden Proportionen zuerst so umstellen, daß das gemeinsame Glied in der einen Proportion ein äußeres, in der anderen ein inneres wird, welche beiden gleichen Glieder bei der Multiplikation weggelassen werden dürfen. (§ 58, a.)

Z. B. Die Proportionen

$$\begin{array}{l} 5 : 10 = 7 : 14 \text{ und} \\ 28 : 7 = 12 : 3 \text{ geben} \\ \hline 5 : 10 = \not{7} : 14 \\ 12 : 3 = 28 : \not{7} \\ \hline (5 \times 12) : (10 \times 3) = 28 : 14 \\ 60 : 30 = 28 : 14 \end{array}$$

2. Zusatz. Soll aus den beiden Proportionen:

$$2 : y = 7 : 5 \text{ und}$$
$$x : y = 6 : 11$$

die Unbekannte x gefunden werden, so ist es nicht notwendig, zuerst y aus der 1. Proportion zu suchen, den gefundenen Wert in die zweite einzusetzen und dann erst x zu suchen, sondern man stellt beide Proportionen (nach Zus. 1.) um, und bildet die entsprechende zusammengesetzte:

$$\begin{array}{l} 2 : y = 7 : 5 \text{ und} \\ x : y = 6 : 11 \text{ geben} \\ \hline 7 : 5 = 2 : y \text{ und} \\ 11 : 6 = y : x \\ \hline 77 : 30 = 2 : x \text{ und daraus} \end{array}$$

$$x = \frac{30 \times 2}{77} = \frac{60}{77}.$$

3. Zusatz. Ebenso verfährt man bei mehreren Proportionen, welche paarweise dieselbe Unbekannte enthalten.

$$\begin{array}{l} \text{Z. B. } 3 : 7 = 5 : v \\ 14 : 9 = v : z \\ 12 : 11 = z : y \\ 22 : 6 = y : x \text{ gibt} \\ \hline (3 \times 14 \times 12 \times 22) : (7 \times 9 \times 11 \times 6) = 5 : x \\ 8 : 3 = 5 : x \\ x = \tfrac{15}{8} = 1\tfrac{7}{8}. \end{array}$$

Solche Proportionen werden kürzer auf folgende Art geschrieben:

$$\left.\begin{array}{r} 3 : 7 \\ 14 : 9 \\ 12 : 11 \\ 22 : 6 \end{array}\right\} = 5 : x$$

§ 60.

Die Proportion $4 : 12 = 7 : 21$ (α) geht (nach § 57, a) über in $4 : 7 = 12 : 21$ (β), und kann nach der Erklärung von den Proportionen geschrieben werden:

$$\tfrac{4}{7} = \tfrac{12}{21};$$

wird zu beiden Seiten 1 addiert, wodurch die Gleichheit nicht aufgehoben wird, so erhält man:

$$\tfrac{4}{7} + 1 = \tfrac{12}{21} + 1,$$

oder, wenn man auf jeder Seite den allgemeinen Nenner für dieselbe herstellt:

$\frac{4+7}{7} = \frac{12+21}{21}$, oder nach der Erklärung v. d. Proport. $(4+7) : 7 = (12+21) : 21$, und nach § 57. a)
$(4+7) : (12+21) = 7 : 21$ oder $= 4 : 12$ (α)
d. h. in Bezug auf die Proportion α:

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede;

oder in Bezug auf die Proportion β:

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des einen Verhältnisses zur Summe der Glieder des anderen, wie zwei homologe Glieder.

Ebenso gelten diese Sätze für die Differenzen der genannten Glieder.

Zusatz. Hat man mehrere gleiche Verhältnisse, wie $5 : 10 = 11 : 22 = 7 : 14$ 2c. 2c., so nennt man sie in dieser Form geschrieben eine fortlaufende Proportion und erhält nach dem Vorhergehenden aus der Proportion:

$5 : 10 = 11 : 22$, die Proportion:
$(5 + 11) : (10 + 22) = 5 : 10$, oder, was dasselbe:
$(5 + 11) : (10 + 22) = 7 : 14$, und daraus nach dem Vorhergehenden:
$(5+11+7) : (10+22+14) = 7 : 14 = 5 : 10 = 11 : 22$; d. h.

Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

B. Anwendung der Proportionslehre auf Regeldetri-Aufgaben.

1. Einfache Regeldetri-Aufgaben.

§ 61.

Es ist gefragt:

1) Wie viel Zins erhält man von 800 ℳ Kapital in einem Jahre zu 5%?

Bedingungssatz: 100 ℳ Kapital 5 ℳ Zins
Fragesatz: 800 ℳ „ x „ „ (§ 51, 2)

Kapital und Zinsen sind direkt proportionale Größen, d. h. einem Vielfachen des Kapitals entspricht das gleiche Vielfache der Zinsen, also gibt 8mal so viel Kapital 8mal so viel Zins, daher müssen die Quotienten (Verhältnisse), welche aus den Kapitalien und aus den Zinsen in derselben Ordnung [beide Glieder aus dem Bedingungssatze entweder als Dividenden (Vorderglieder), oder als Divisoren (Hinterglieder)] gebildet werden, einander gleich sein, mithin hat man die Proportionen:

100 ℳ Kapital : 800 M. Kapital = 5 ℳ Zins : x ℳ Zins, oder
800 „ „ : 100 „ „ = x „ „ : 5 „ „

Läßt man die Benennungen weg, weil Verhältnisse nur durch unbenannte Zahlen ausgedrückt werden, und nur mit unbenannten Zahlen allgemein gerechnet werden kann, so erhält man:

$$100 : 800 = 5 : x, \text{ oder}$$
$$800 : 100 = x : 5, \text{ und daraus}$$
$$x = \frac{800 \times 5}{100} = 40,$$

wobei sich die Benennung des Resultates jedesmal aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt.

2) 100 Mann reichen mit einem gewissen Vorrate 40 Tage; wie lange werden 400 Mann damit reichen?

Bedingungssatz: 100 Mann 40 Tage.
Fragesatz: 400 „ x „

Da die hier vorkommenden beiden Größen umgekehrt proportional sind, d. h. das Vielfache der einen Größe dem ebenso

vielten Teile der andern entspricht, so werden die Quotienten, welche aus den Zahlen für die Consumenten und die Tage gebildet werden, nur dann einander gleich sein, wenn man sie in umgekehrter Ordnung (das eine Glied aus dem Fragesatze als Hinterglied, das andere als Vorderglied) bildet. Man hat demnach

100 Mann : 400 Mann = x Tage : 40 Tagen oder
400 „ : 100 „ = 40 „ : x „

und ohne Benennung:

$$400 : 100 = 40 : x$$

woraus $x = \frac{100 \times 40}{400} = 10$ folgt.

Anmerkung. Die Unbekannte (das unbekannte Glied) setzt man gewöhnlich an die vierte Stelle.

Aus den vorhergehenden Beispielen ergeben sich folgende zwei Regeln für den Ansatz einer Regeldetriaufgabe in Form einer Proportion:

a) Man untersuche, ob die Größen direkt oder indirekt proportional sind, bilde dann aus den Zahlen der gleichbenannten Größen zwei Verhältnisse — im ersten Falle in derselben Ordnung, im zweiten Falle in umgekehrter Ordnung, und setze die Quotienten einander gleich. Ist also x an der 4., das ihm gleichbenannte Glied aus dem Bedingungssatze an der 3. Stelle, so kommt bei direkt proportionalen Größen die bekannte Zahl aus dem Fragesatze an die 2., bei indirekt proportionalen an die 1. Stelle.

b) Man bilde aus dem Frageglied und dem mit ihm gleichbenannten Gliede des Bedingungssatzes ein Verhältnis, überlege, ob dasselbe steigend oder fallend ist, und bilde dann aus den beiden andern Zahlen ebenfalls ein steigendes oder fallendes Verhältnis. Denn da die Verhältnisse einer Proportion einander gleich sind, so müssen beide zugleich entweder steigend oder fallend sein.

2. Maßreduktionen.

§ 62.

Wie Maßreduktionen durch Proportionen ausgeführt werden, läßt sich aus folgenden Aufgaben ersehen:

1) Wie viele bayerische Fuß gaben 100 würtembergische Fuß, wenn der bayer. Fuß sich zum württemb. Fuß wie 129,38 : 127 verhielt?

Aus der Proportion:

1 bayer. Fuß : 1 würt. Fuß = 129,38 : 127 folgt, daß
127 × 1 bayer. Fuß = 129,38 × 1 würt. Fuß, oder
was dasselbe ist, 127 bayer. Fuß = 129,38 würt. Fuß (§ 55).

Es heißt demnach der Fragesatz: x bayer. Fuß 100 würt. Fuß
und der Bedingungssatz: 127 „ „ 129,38 „ „

$$129{,}38 : 100 = 127 : x$$

$$x = \frac{100 \times 127}{129{,}38} = 98{,}1 \ldots.$$

2) Wie viele bayerische Eimer gaben 50 preußische Eimer, wenn ein bayerischer Eimer 64,1416 Liter und ein preußischer Eimer 68,702 Liter hielt?

Da der bayerische Eimer 64,1416 und der preuß. 68,702 Liter hielt, so verhält sich

1 bayer. Eimer : 1 preuß. Eimer = 64,1416 : 68,702,
daher sind 68,702 bayer. Eimer = 64,1416 preuß. Eimern (§ 55).

Fragesatz: x bayerische Eimer 50 preußische Eimer.
Bedingungssatz: 68,702 „ „ 64,1416 „ „

$$64{,}1416 : 50 = 68{,}702 : x$$

$$x = \frac{50 \times 68{,}702}{64{,}1416} = 53{,}555$$

(statt 53,55497 .... § 50 Anmerk. 2).

3) Wie viele Gulden nach der süddeutschen Währung gaben 100 dänische Reichsbankthaler, wenn 39,5543 Reichsbankthaler auf ein Zollpfund feinen Silbers gehen?

Nach der süddeutschen Währung gingen $52\frac{1}{2}$ fl. auf ein Zollpfund feinen Silbers, nach der dänischen Währung gehen 39,5543 Thaler auf ein Zollpfund, also gaben $52\frac{1}{2}$ fl. süddeutsche Währung 39,5543 dänische Reichsbankthaler.

Fragesatz: x fl. südd. Währ. 100 dän. R.-B.-Thlr.
Bedingungssatz: $52\frac{1}{2}$ fl. „ „ 39,5543 „ „ „

$$39{,}5543 : 100 = 52\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{105 \times 100}{2 \,.\, 39{,}5543} = 132{,}729.$$

3. Lösung zusammengesetzter Regeldetri-Aufgaben durch Proportionen.

§ 63.

Jede zusammengesetzte Regeldetri-Aufgabe läßt sich in einfache Regeldetri-Aufgaben zerlegen, wie in folgendem Beispiele gezeigt wird.

Wenn 12 Weber bei zehnstündiger täglicher Arbeitszeit in 27 Tagen 30 Stück Leinwand verfertigen, wie lange werden 15 Weber bei neunstündiger täglicher Arbeitszeit zu 40 Stück Leinwand brauchen?

Bedingungssatz:	12 Weber	10 Stunden tägl.	30 Stück	27 Tage
Fragesatz:	15 „	9 „	„ 40 „	x „

Vergleicht man immer nur zwei Paare proportionaler Größen, so erhält man folgende einfache Regeldetriaufgaben:

1) Wie lange braucht man zu 40 Stück, wenn man zu 30 Stück 27 Tage braucht? (bei 10 Stunden Arbeitszeit und 12 Webern.)

Bedingungssatz:	27 Tage	30 Stück
Fragesatz:	z „	40 „

a) $30 : 40 = 27 : z$

z Tage braucht man zu 40 Stück bei 10 Stunden Arbeitszeit; es soll aber gesucht werden, wie lange gebraucht wird bei 9 Stunden Arbeitszeit; also hat man:

2) Wie lange braucht man bei 9 Stunden Arbeitszeit, wenn man bei 10 Stunden z Tage braucht? (12 Arbeiter.)

Bedingungssatz:	z Tage	10 Stunden Arbeitszeit
Fragesatz:	y „	9 „ „

b) $9 : 10 = z : y.$

y Tage braucht man zu 40 Stück bei 9 Stunden täglicher Arbeitszeit; allein so lange brauchen 12 Weber; es soll aber gesucht werden, wie lange 15 Weber brauchen, somit hat man:

3) Wie lange brauchen 15 Weber, wenn 12 Weber y Tage brauchen?

Bedingungssatz:	y Tage	12 Weber
Fragesatz:	x „	15 „

c) $15 : 12 = y : x$

x Tage brauchen 15 Weber bei 9 Stunden täglicher Arbeitszeit zu 40 Stück.

Um x zu finden, geben die 3 Proportionen a, b, c:

$$30 : 40 = 27 : z$$
$$9 : 10 = z : y$$
$$15 : 12 = y : x, \text{ folglich (nach § 59 Zus. 3.)}$$

$$\text{d)}\ \left.\begin{array}{r} 30 : 40 \\ 9 : 10 \\ 15 : 12 \end{array}\right\} = 27 : x$$

und daraus

$$x = \frac{(40 \times 10 \times 12) \times 27}{30 \times 9 \times 15} = 32.$$

Die Vergleichung dieser zusammengesetzten Proportion d) mit der gegebenen Aufgabe gibt folgende Regel:

Man bilde nach der Lehre der einfachen Regeldetri mit dem Frageverhältnisse [dem gesuchten Gliede und dem ihm gleichnamigen] und jedem Paare der gleichbenannten Zahlen nach einander Proportionen ohne Rücksicht auf die übrigen gegebenen Größen. Die dadurch erhaltenen Verhältnisse aus den gleichbenannten Zahlen mit dem Frageverhältnisse zu einer zusammengesetzten Proportion verbunden geben dann die gesuchte Zahl (x).

Z. B. Mit 4 Fässern Fleisch können 50 Mann auf einem Schiffe, wenn jeder täglich 240 Gramm erhält, 7 Wochen ausreichen. Wie lange können 40 Mann mit 8 Fässern ausreichen, wenn jeder Mann täglich 280 Gramm erhält?

Bedingungssatz:	4 Fässer	50 Mann	240 Gramm tägl.	7 Wochen.
Fragesatz:	8 „	40 „	280 „ „	x „

$$\left.\begin{array}{r} 280 : 240 \\ 40 : 50 \\ 4 : 8 \end{array}\right\} = 7 : x$$

a) Erhält der Mann täglich 240 Gramm, so reicht man 7 Wochen, wie lange wird man reichen, wenn er 280 Gramm erhält? Die Größen sind umgekehrt proportional, also schreibt man 280 : 240 (oder: da 7 : x ein fallendes Verhältnis ist, so muß man auch 280 : 240 als ein fallendes Verhältnis anschreiben).

b) 50 Mann können 7 Wochen ausreichen, wie lange werden 40 reichen? Indirekt proportionale Größen, folglich 40 : 50 (oder: 7 : x steigend, folglich auch 40 : 50 steigend).

c) Mit 4 Fässern reicht man 7 Wochen, wie lange mit 8

Fässern? Direkt proportionale Größen, folglich 4 : 8 (oder: 7 : x steigend, mithin auch 4 : 8 steigend).

Daraus $x = \frac{7 \times 240 \times 50 \times 8}{280 \times 40 \times 4} = 15.$

4. Kettenregel.

§ 64.

Es sei die Aufgabe gegeben:

Wie viele bayerische Ellen betragen 5893 Hamburger Ellen, da 7 russische Ellen gleich sind 9 Leipziger, 57 Wiener ebensoviel als 78 Hamburger, während 56 bayerische Ellen 83 Leipziger und 71 Wiener 78 russische geben?

In dieser Aufgabe sollen Hamburger Ellen in bayerische verwandelt werden, es ist uns also ein Verhältnis zwischen Hamburger und bayerischen Ellen notwendig. Ein solches ist aber nicht gegeben, sondern durch mehrere sogenannte Zwischenverhältnisse dargestellt, durch welche man das Verlangte auf folgende Weise erhalten kann:

x bayerische Ellen geben 5893 Hamburger,
wenn 78 Hamburger Ellen = 57 Wiener,
71 Wiener „ = 78 russischen,
7 russische „ = 9 Leipziger,
83 Leipziger „ = 56 bayerischen Ellen.

Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt:

78 × 1 Hamburger = 57 × 1 Wiener,
71 × 1 Wiener = 78 × 1 russischen,
7 × 1 russische = 9 × 1 Leipziger,
83 × 1 Leipziger = 56 × 1 bayerischen, und aus diesen gleichen Produkten erhält man (nach § 52, Zus.) die Proportionen:

1 H. : 1 W. = 57 : 78
1 W. : 1 r. = 78 : 71
1 r. : 1 L. = 9 : 7
1 L. : 1 b. = 56 : 83

Diese vier Proportionen, zu einer zusammengesetzten (nach § 59, Zus. 3.) verbunden, geben:

1 H.:1 b. = (57 × 78 × 9 × 56):(78 × 71 × 7 × 83), oder 78 × 71 × 7 × 83 Hamburger Ellen = 57 × 78 × 9 × 56 bayerische Ellen.

Man hat also den Bedingungssatz in der Form, wie er zu einer einfachen Regeldetri-Aufgabe notwendig ist, nämlich:

Bedingungssatz: 57 × 78 × 9 × 56 bayer. Ellen 78 × 71 × 7 × 83 Hamburger Ellen.

Fragesatz: x bay. Ellen 5839 Hamburger Ellen.

Die Größen sind direkt proportional, daher erhält man:

78 × 71 × 7 × 83 : 5893 = 57 × 78 × 9 × 56 : x und

$$\text{daraus } x = \frac{5893 \times 57 \times 78 \times 9 \times 56}{78 \times 71 \times 7 \times 83}$$

Macht man nun den Teilstrich dieses Quotienten statt horizontal vertikal, setzt rechts den Dividenden des Quotienten, links x und den Divisor, so erhält man, wenn man jeder dieser Zahlen ihre Benennung gibt, folgende Form:

bayer. Ellen	x	5893	Hamb. Ellen
Hamb.	78	57	Wiener
Wiener	71	78	russische
russische	7	9	Leipziger
Leipziger	83	56	bayer.

und daraus folgende Regel:

Um eine Aufgabe nach der Kettenregel zu lösen, setze man das unbekannte Glied links zu oberst, ihm rechts gegenüber das (gleichwertige) Frageglied, hierauf links immer das gleichnamige von dem rechts vorhergehenden und rechts das gleichwertige von dem in derselben Zeile links stehenden, bis das letzte Glied rechts dieselbe Benennung hat, wie das oberste links. Das Produkt der Zahlen rechts bildet den Dividenden, das Produkt der Zahlen links den Divisor jenes Quotienten, durch welchen x ausgedrückt ist.

Diese Lösungsart heißt auch Reesischer Ansatz, und wird hauptsächlich bei Münz-, Maß- und Gewichtreduktionen angewendet, wenn das Verhältnis der Größen im Fragesatz nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch gegebene Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß.

Obwohl jede Regeldetri-Aufgabe nach dem Reesischen Ansatze, natürlich nur nach einer neu abzuleitenden Regel, gelöst werden

könnte, so thut man doch besser, den Reesischen Ansatz auf Aufgaben, wie die oben gelöste, und auf Regeldetri-Aufgaben mit direkt proportionalen Größen zu beschränken.

Z. B. 1) Wie viele Pfennige kosten 10 gr, wenn $1\frac{5}{8}$ Ztr. 406 ℳ 25 ₰ kosten?

Pfennige	x	10	gr
gr	1000	1	kgr
kgr	50	1	Ztr.
Ztr.	$1\frac{5}{8}$	$406\frac{1}{4}$	ℳ
ℳ	1	100	₰

$$x = \frac{10 \times 1625 \times 100 \times 8}{4 \times 1000 \times 50 \times 13} = 5 \text{ (₰)}$$

2) Ein Weinwirt erhält 325 österreichische Maß Wein, und bezahlt dafür 260 österreichische Gulden. Wie viele Pfennige kostet das Liter, wenn sich die österreichische Maß zum Liter wie 7 : 5 verhält, der österreichische Gulden zu 2 Mark gerechnet wird und der Wirt 19% gewinnen will?

Verkauf ₰	x	1 Liter
Liter	7	5 österr. Maß
österr. M.	325	260 österr. fl.
österr. fl.	1	2 ℳ
ℳ	1	100 ₰
Einkauf ₰	100	119 ₰ Verkauf

$$x = \frac{5 \times 260 \times 2 \times 100 \times 119}{7 \times 325 \times 100} = 136 \text{ (₰} = 1 \text{ ℳ } 36 \text{ ₰)}.$$

5. Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung.

§ 65.

1) Soll eine Zahl in mehrere ungleiche Teile nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt werden, so heißt die Aufgabe eine Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung.

Man habe die Aufgabe:

420 ℳ sollen unter drei Personen so verteilt werden, daß sich die Teile zu einander verhalten, wie 3 : 5 : 7.

Die letztere Bedingung könnte auch noch so ausgedrückt werden, daß, so oft die erste Person 3 ℳ erhält, die zweite Person 5 ℳ und die dritte Person 7 ℳ bekommt. Wollte man diese Teilung wirklich vornehmen, so könnte dies dadurch geschehen, daß

man der ersten Person 3 ℳ, der zweiten Person 5 ℳ und der dritten Person 7 ℳ gibt, hierauf das Verfahren wiederholt, und auf diese Art fortfährt, bis die ganze Summe verteilt ist. Da nun jedesmal 3 + 5 + 7 ℳ = 15 ℳ zur Verteilung kommen, so erhält die erste Person so oft 3 ℳ, die zweite so oft 5 ℳ und die dritte so oft 7 ℳ, als sich die Zahl 15 von 420 wegnehmen läßt, oder so oft 15 in 420 enthalten ist. Somit erhält also

die erste $\frac{420}{15} \times 3 = 28 \times 3 = 84$

„ zweite $\frac{420}{15} \times 5 = 28 \times 5 = 140$

„ dritte $\frac{420}{15} \times 7 = 28 \times 7 = 196$

$\overline{420}$

Auch mit Hilfe der Proportionen kann die Aufgabe gelöst werden und zwar auf folgende Art:

Bezeichnet man die gesuchten Teile mit x, y, z, so hat man nach der Bedingung der Aufgabe:

$x : y = 3 : 5$

$y : z = 5 : 7$ oder (nach § 57, a)

$x : 3 = y : 5$ und

$y : 5 = z : 7$, daher

$x : 3 = y : 5 = z : 7$, und (nach § 60, Zus.)

$(x+y+z) : (3+5+7) = x : 3 = y : 5 = z : 7$, oder da $x + y + z$ die zu verteilende Zahl 420 vorstellt:

$420 : (3 + 5 + 7) = x : 3$

$420 : (3 + 5 + 7) = y : 5$

$420 : (3 + 5 + 7) = z : 7$, und daraus:

$$x = \frac{420}{3+5+7} \times 3 = 84$$

$$y = \frac{420}{3+5+7} \times 5 = 140$$

$$z = \frac{420}{3+5+7} \times 7 = 196$$

dasselbe, was oben erhalten wurde.

Daraus ergibt sich folgende Regel:

Soll eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen in Teile zerlegt werden, so erhält man diese dadurch, daß man die zu teilende Zahl durch die Summe der Verhält-

niszahlen dividiert und den erhaltenen Quotienten mit jeder Verhältniszahl multipliziert.

2) Müssen die Verhältniszahlen erst gesucht werden, so nehme man eine davon, und zwar diejenige, nach welcher die übrigen am leichtesten bestimmt werden können, beliebig an, wobei diese am besten so gewählt wird, daß Brüche vermieden werden.

Z. B. Unter drei Söhne soll ein Neujahrsgeschenk von 35 ℳ so verteilt werden, daß der Zweite halb so viel als der Erste, und der Dritte halb so viel als der Zweite erhält; wie viel erhält jeder?

Nimmt man als Verhältniszahl für den Anteil des Ersten 4, so ist die Verhältniszahl für den Zweiten $\frac{4}{2} = 2$
und für den Dritten $\frac{2}{2} = 1$,

folglich der Anteil des 1. $= \frac{35}{4+2+1} \times 4 = 20$
" " " " 2. $= \frac{35}{7} \times 2 = 10$
" " " " 3. $= \frac{35}{7} \times 1 = 5$.

3) Sind die Verhältniszahlen Brüche, so bringe man sie auf gleichen Nenner und teile im Verhältnisse der Zähler.

Z. B. Es soll die Zahl 364 in 3 Teile zerlegt werden, die sich verhalten wie $\frac{5}{6} : \frac{3}{2} : 2$. Für die Brüche ist der allgemeine Nenner 6, die entsprechenden Zähler sind: 5, 9, 12; da nun 5 + 9 + 12 = 26, so hat man

1. Teil $= \frac{364}{26} \times 5 = 70$
2. " $= \frac{364}{26} \times 9 = 126$
3. " $= \frac{364}{26} \times 12 = \underline{168}$
364

Anmerkung. Haben sämmtliche Verhältniszahlen einen gemeinschaftlichen Faktor, so soll derselbe von vornherein weggelassen werden (wie im folgenden Beispiele).

4) Werden die Verhältniszahlen durch das Zusammenwirken mehrerer Umstände bedingt, so heißt die Aufgabe eine zusammengesetzte Gesellschafts- oder Repartitions-Aufgabe.

Z. B. Zu einem gemeinsamen Unternehmen gab A 6000 ℳ auf 3 Jahre, B 4000 ℳ auf 5 Jahre; sie machten einen Gewinn von 5700 ℳ. Wie viel erhielt jeder?

A gab 6000 ℳ auf 3 Jahre, wofür er denselben Gewinnanteil erhält, als wenn er 18000 ℳ auf 1 Jahr gegeben hätte;

B gab 4000 ℳ auf 5 Jahre, oder 20000 ℳ auf 1 Jahr, folglich sind die Verhältniszahlen für

A 18000 }
B 20000 } (gleiche Faktoren bleiben weg)

A 9
B 10
19

5700 : 19 = 300
A = 300 × 9 = 2700
B = 300 × 10 = 3000
5700.

6. Vermischungs- oder Alligations-Rechnung.

§ 66.

Werden Gegenstände (Ingredienzien) von verschiedenen Preisen in verschiedenen Mengen (Quantitäten) vermischt, so entstehen drei Arten von Aufgaben, deren Lösung den Namen Vermischungs- oder Alligations-Rechnung führt.

1) Es kann nach dem Werte der Mischungseinheit gefragt werden, wenn die Preise der zu mischenden Ingredienzien nebst ihren Quantitäten gegeben sind.

Z. B. Ein Weinwirth mischt 30 Liter Wein, das Liter zu 48 ₰, mit 45 Liter, das Liter zu 96 ₰, und gießt noch 5 Liter Wasser dazu; wie hoch kommt das Liter dieser Mischung?

Um den Preis der Mischungseinheit zu finden, muß der Preis der ganzen Mischung und die Anzahl der Mischungseinheiten bekannt sein.

Preis von 30 Liter zu 48 ₰ = 30 × 0,48 ℳ = 14,4 ℳ
" " 45 " " 96 " = 45 × 0,96 " = 43,2 "
" " 5 " " 0 " = 5 × 0 " = 0 "
80 Liter kosten 57,6 "

folglich kostet 1 Liter $\frac{5760}{80}$ ₰ = 72 ₰.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise wie der Preis für die Mischungseinheit wird auch der Durchschnittspreis oder Mittelpreis berechnet. (§ 54 Anmerk. 3.)

2) Man kann, wenn die Quantität der Mischung und die Verhältniszahlen, nach welchen die einzelnen Bestandteile gemischt

werden sollen, gegeben sind, nach den Quantitäten der Ingredienzien fragen.

Z. B. Um eine gewisse Art Pulver zu bereiten, müssen 16 Gewichtsteile Salpeter, 2 Teile Schwefel und 3 Teile Kohle genommen werden. Wie viel hat man von jedem dieser Stoffe notwendig, um 26¼ Ztr. Pulver zu erhalten?

Es soll hier die Zahl 26¼ Ztr. oder 2625 ℔ in drei Teile geteilt werden, welche sich verhalten wie 16 : 2 : 3, daher hat man (nach § 65):

16 + 2 + 3 = 21
2625 : 21 = 125

Salpeter	= 125 × 16 ℔	= 2000 ℔	= 20 Ztr.
Schwefel	= 125 × 2 ℔	= 250 ℔	= 2½ Ztr.
Kohle	= 125 × 3 ℔	= 375 ℔	= 3¾ Ztr.
			26¼ Ztr.

Diese Art von Mischungsaufgaben gehört zu den Teilungsaufgaben.

3) Sollen aus dem Preise der Mischung und den Preisen der Ingredienzien die Verhältniszahlen, nach welchen dieselben gemischt werden sollen, oder ihre Quantitäten gefunden werden, so hat man die eigentliche Alligationsrechnung.

a) Wenn nur zwei Sorten gemischt werden, ergibt sich das Verfahren aus der Betrachtung von folgender Aufgabe:

Ein Weinwirt hat zweierlei Weine. Von dem einen kostet das Liter 2 Mark 20 ₰, von dem anderen 1 Mark 30 ₰. Er will diese beiden Sorten so mischen, daß das Liter der Mischung 1 Mark 90 ₰ wert ist; in welchem Verhältnis muß dies geschehen?

Von der 1. Sorte kostet das Liter 2 Mark 20 ₰ = 220 ₰.
" " 2. " " " " 1 " 30 " = 130 "

Vor der Mischung soll das Liter 1 Mark 90 ₰ = 190 ₰ kosten, also kostet jedes Liter der teureren Sorte 30 ₰ mehr und jedes Liter der wohlfeileren Sorte 60 ₰ weniger, als ein Liter der Mischung.

Es muß demnach in einem solchen Verhältnisse gemischt werden, daß das Mehr des besseren Weines durch das Weniger des geringeren ausgeglichen wird. Dieses ist der Fall, wenn das Produkt aus dem Mehr (30 ₰) und der entsprechenden Verhältniszahl gleich ist dem Produkte aus dem Weniger (60 ₰) und der zugehörigen Verhältniszahl, weil dann für die eine Sorte ebensoviel

mehr, als für die andere weniger bezahlt wird. Diese Gleichheit wird erreicht, wenn 30 ₰ mit 60 und 60 ₰ mit 30 multipliziert werden, folglich muß in dem Verhältnisse von 60 : 30, oder (nach § 65 3) Anmerk.) von 2 : 1 gemischt werden. Dieses Resultat erhält man auf folgende Weise:

1. Sorte 220} Mischung 190   190 — 130 = 60; 2
2. Sorte 130}   220 — 190 = 30; 1

es trifft auf je 2 Liter der 1. Sorte 1 Liter der 2. und man erhält folgende Regel:

Der Unterschied zwischen dem Preise der Mischung und dem Preise der wohlfeileren Sorte gibt die Verhältniszahl für die teurere Sorte, und der Unterschied zwischen dem Preise der teureren Sorte und jenem der Mischung gibt die Verhältniszahl für die wohlfeilere Sorte.

Z. B. Ein Silberarbeiter will aus 0,6 und 0,9 feinem Silber 6 Pfund 0,8 feines zusammenschmelzen; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

0,6} 0,8 0,9—0,8=0,1 (Verhältniszahl für das 0,6 feine Silber),
0,9}   0,8—0,6=0,2   „   „   „ 0,9   „   „

es müssen also 6 Pfund im Verhältnisse von 1 : 2 geteilt werden.

6 ℔
1 + 2 = 3
6 : 3 = 2.

Vom 0,6 feinen Silber braucht er 1 × 2 ℔ = 2 ℔,
von 0,9 feinen Silber 2 × 2 ℔ = 4 ℔.

b) Hat man mehr als zwei Sorten zu mischen, so sind verschiedene Verhältniszahlen möglich, welche der Aufgabe entsprechen.

Z. B. Ein Weinwirt hat dreierlei Weine, das Liter zu 2 Mark 16 ₰, zu 1 Mark 68 ₰ und zu 1 Mark 8 ₰. Er will diese 3 Sorten so mischen, daß das Liter der Mischung 1 Mark 44 ₰ wert ist; in welchen Verhältnissen kann dieses geschehen?

α) Die verlangte Mischung könnte sowohl durch die 1. und 3. Sorte als durch die 2. und 3. hergestellt werden, nicht aber durch die 1. und 2. Sorte, weil jede dieser beiden Sorten teurer ist, als die Mischung.

Für die 1. und 3. Sorte hätte man nach dem Vorhergehenden

1. Sorte 2,16 } 1,44   1,44 — 1,08 = 0,36 oder 1
3. „ 1,08 }   2,16 — 1,44 = 0,72   2;

es müßte also von der ersten Sorte immer ein Liter, von der

dritten Sorte zwei Liter gewonnen werden, und die Mischung wäre die verlangte.

Für die 2. und 3. Sorte folgt:

2. Sorte	1,68	1,44	1,44 — 1,08 = 0,36	oder	3
3. „	1,08		1,68 — 1,44 = 0,24		2;

je 3 Liter der 2. und je 2 Liter der 3. Sorte geben ebenfalls die verlangte Mischung.

Gießt man diese beiden Mischungen zusammen, so erhält man wieder eine Mischung, deren Preis der verlangte ist; dabei ist dann

von der 1. Sorte je 1 Liter	also sind die Verhältniszahlen	1
„ „ 2. „ „ 3 „		3
„ „ 3. „ 2+2 „		4

β) Daß noch andere Verhältniszahlen möglich sind, kann auf folgende Weise gezeigt werden:

1. Sorte 2,16		Ein Liter d. 1. S. kostet 72 ₰ zu **viel**	in Bezug auf den Misch.-Preis;
2. „ 1,68	1,44	„ „ „ 2. „ „ 24 „ „ „	
3. „ 1,08		„ „ „ 3. „ „ 36 „ „ **wenig**	

wollte man also von der 1. und 2. Sorte gleich viel nehmen, so wäre, wenn man je ein Liter nähme, der Preis von zwei Litern dieser Mischung um 72 + 24 ₰ = 96 ₰ größer als jener von 2 Liter der verlangten Mischung; mischt man nun damit die 3. Sorte, so muß das Weniger der 3. Sorte das Mehr aus den beiden anderen Sorten wieder ausgleichen; man nehme deshalb von der ersten und zweiten Sorte je 3, von der dritten Sorte 8 Liter, denn es ist dann 2 × 48 × 3 = 36 × 8, man hat also die Verhältniszahlen: 3, 3, 8.

Wollte man von der 1. und 2. Sorte nicht gleich viel nehmen, so könnte man etwa von der zweiten und dritten Sorte gleich viel nehmen, außerdem würden auch andere Verhältniszahlen entsprechen, wie z. B.

1. Sorte	2. Sorte	3. Sorte
2	3	6
4	3	10; denn

2 Liter d. 1. Sorte kosten 1,44 ℳ mehr als 2 Liter der verlangten Misch.
3 „ „ 2. „ „ 0,72 „ „ „ 3 „ „ „ „
6 „ „ 3. „ „ 2,16 „ weniger als 6 „ „ „
also ist das Mehr = dem Weniger.

Von der Richtigkeit der verschiedenen Verhältniszahlen überzeugt man sich, wenn (nach 1.) der Preis der Mischung gesucht wird, welche mit diesen Verhältniszahlen hergestellt wird.

Die gefundenen Verhältniszahlen heißen also:

	a	b	c	d
für die 1. Sorte	1	3	2	4
„ „ 2. „	3	3	3	3
„ „ 3. „	4	8	6	10
	8	14	11	17

Die zuerst abgeleiteten sind offenbar die einfachsten, weil sie die kleinste Summe geben, das Auffinden derselben kann durch folgende Regel ausgedrückt werden:

Man stelle diejenigen Sorten paarweise zusammen, aus welchen allein die verlangte Mischung hergestellt werden könnte, und suche hierauf für jedes dieser Paare die Verhältniszahlen (nach a), dann geben die Summen der Verhältniszahlen von den Sorten, welche öfters vorkommen, die gesuchten Verhältniszahlen.

Dies gilt nicht bloß für drei Ingredienzien, sondern auch für mehrere.

Z. B. Ein Silberarbeiter will aus 0,9; 0,7; 0,6 und ganz feinem Silber eine Legierung herstellen, welche 0,8 fein ist. Von dem 0,9 feinen Silber hat er 6 ℔, welche er vollständig dazu benützen will, wie viel kann er von jeder anderen Sorte nehmen?

1. Sorte	0,9	0,8	0,1;	1	1. Sorte	0,9	0,8	0,2;	2
2. „	0,7		0,1;	1	3. „	0,6		0,1;	1
2. „	0,7	0,8	0,2;	2	3. „	0,6	0,8	0,2;	1
4. „	1,0		0,1;	1	4. „	1,0		0,2;	1

Verhältniszahlen:

Für die 1. Sorte $1 + 2 = 3$
2. „ $1 + 2 = 3$
3. „ $1 + 1 = 2$
4. „ $1 + 1 = 2$

Von der ersten Sorte will er 6 ℔ nehmen, welchen die Verhältniszahl 3 entspricht, daher treffen auf 1 als Verhältniszahl zwei Pfund. Somit kann er nehmen

von der 2. Sorte 3×2 ℔ $= 6$ ℔
3. „ 2×2 „ $= 4$ „
4. „ 2×2 „ $= 4$ „

γ) Man sieht leicht, daß man auch brauchbare Verhältniszahlen erhalten muß, wenn man die Verhältniszahlen, welche man nach α) für die Mischungen von je zwei Bestandteilen erhalten hat, mit zwei, drei u. s. f. multipliziert, und sie mit dem einfachen, doppelten, dreifachen u. s. w. der Verhältniszahlen für die zweite, dritte 2c. 2c. Zusammenstellung von je zwei Bestandteilen verbindet. Durch dieses Verfahren ist man in den Stand gesetzt, bei Mischung mehrerer Bestandteile in solchen Fällen, in welchen das bisher angegebene Verfahren die Quantitäten der Bestandteile nicht in ganzen Zahlen ausgedrückt gibt, letzteres zu erreichen, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen ist.

Ein Weinwirt hat dreierlei Wein, das Liter zu 2 ℳ 16 ₰, zu 1 ℳ 68 ₰ und zu 1 ℳ 8 ₰. Er will aus diesen drei Sorten ein Hektoliter so mischen, daß das Liter der Mischung 1 ℳ 44 ₰ wert ist.

Man hat nach S. 99 b)

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} \text{a) } 216 \\ \text{c) } 108 \end{array}\; 144\; \begin{array}{c} 36 \\ 72 \end{array}\;\text{oder}\; \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \qquad \text{II.}\quad \begin{array}{l} \text{b) } 168 \\ \text{c) } 108 \end{array}\; 144\; \begin{array}{c} 36 \\ 24 \end{array}\;\text{oder}\; \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}$$

Um ganze Zahlen für die Quantitäten der Bestandteile zu erhalten, muß die Summe der Verhältniszahlen entweder der Anzahl der verlangten Liter (100) gleich, oder in ihr ohne Rest enthalten sein, was mit den gefundenen Verhältniszahlen nicht direkt, sondern nur dadurch erreicht werden kann, daß man je zwei zusammengehörige Verhältniszahlen mit einem geeigneten Faktor multipliziert. So erhält man, wenn man das erste Paar von Verhältniszahlen mit fünf, das zweite mit zwei multipliziert:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} \text{a) } 5 \\ \text{c) } 10 \end{array} \qquad \text{II.}\quad \begin{array}{l} \text{b) } 6 \\ \text{c) } 4; \end{array}$$

dadurch erhält man als Verhältniszahl für die erste Sorte 5, für die zweite 6, für die dritte $10 + 4 = 14$

und hat $\frac{100}{5+6+14} = \frac{100}{25} = 4$; mithin die Anzahl der Liter für die erste Sorte 20, für die zweite 24, für die dritte 56.

Aus dieser Auflösung ergeben sich andere durch folgende Betrachtung:

Wollte eine Mischung zum Preise der gegebenen Mittelsorte aus der besten und geringsten hergestellt werden, so hätte man für die Herstellung der Verhältniszahlen folgende Darstellung:

$$\begin{array}{c} 216 \\ 108 \end{array}\; 168\; \begin{array}{c} 60 \\ 48 \end{array}\;\text{oder}\; \begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array}$$

Es können also für den Zweck der Aufgabe fünf Liter der besten und vier Liter der geringsten Sorte zusammen neun Liter der mittleren ersetzen. Man erhält daher aus der obigen Auflösung jedesmal eine neue Auflösung, so oft man zur Quantiät der ersten Sorte fünf und zur dritten vier Liter addiert oder davon subtrahiert, wenn man gleichzeitig von der Quantität der zweiten Sorte neun Liter subtrahiert, beziehungsweise dazu addiert, so daß sich folgende Auflösungen ergeben:

I. Sorte	II. Sorte	III. Sorte
30	6	64
25	15	60
20 (5)	24 (9)	56 (4)
15	33	52
10	42	48
5	51	44

δ) Sind mehr als 3 Bestandteile gegeben, so kommt zu dem Vorhergehenden noch eine neue Modifikation, wie in der folgenden Aufgabe:

Ein Essigfabrikant hat vier Sorten Essig, das Liter zu 9, 12, 18 und 24 ₰. Er will daraus 60 Liter zu 15 ₰ durch Mischung herstellen; wie viel kann er von jeder Sorte nehmen?

Man erhält hier folgende Darstellung:

a) 24 ₰. b) 18 ₰. c) 12 ₰. d) 9 ₰. Mischung 15 ₰.

I.	a) 24	15	3	od.	1
	c) 12		9		3
II.	a) 24	15	6	od.	2
	d) 9		9		3
III.	b) 18	15	3	od.	1
	c) 12		3		1
IV.	b) 18	15	6	oder	2
	d) 9		3		1

Da der Faktor, mit welchen man (nach γ) ein Paar zusammengehöriger Verhältnißzahlen in I, II, III oder IV multiplizieren darf, vollkommen beliebig ist, so darf man als diesen Faktor auch Null nehmen, d. h. man darf ein Paar solcher Verhältnißzahlen weglassen. Thut man dies in Bezug auf I (während man die übrigen Verhältniszahlen ungeändert läßt), so erhält man folgende Verhältnißzahlen:

a)	b)	c)	d)
0 + 2	1 + 2	0 + 1	3 + 1
2	3	1	4

und hat $\frac{60}{2+3+1+4} = \frac{60}{10} = 6$; mithin die Anzahl der Liter für

die erste Sorte 12, für die zweite Sorte 18, für die dritte 6, für die vierte 24.

Aus dieser Auflösung kann man nach dem bei dem vorhergehenden Beispiele γ angegebenen Verfahren neue finden, wenn man eine Zahl, z. B. jene für die vierte Sorte ungeändert läßt, und zwar auf folgende Weise:

$$\begin{matrix}24\\12\end{matrix}\ 18\ \begin{matrix}6\\6\end{matrix}\ \text{oder}\ \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$$

So oft man also zur ersten und dritten Sorte je ein Liter addiert, oder davon subtrahiert, muß man von der zweiten Sorte zwei Liter subtrahieren, beziehungsweise dazu addieren und erhält dadurch folgende Auflösungen:

I. Sorte	II. Sorte	III. Sorte	IV. Sorte
7	28	1	24
8	26	2	24
9	24	3	24
10	22	4	24
11	20	5	24
12 (1)	18 (2)	6 (1)	24
13	16	7	24
14	14	8	24
15	12	9	24
16	10	10	24
17	8	11	24
18	6	12	24
19	4	13	24
20	2	14	24

Weitere Auflösungen erhält man, wenn man die Zahl der Liter für die erste, zweite oder dritte Sorte unverändert läßt, sowie wenn man die Verhältniszahlen anders bestimmt, und wieder in der oben ausgeführten Weise verfährt.

Achte Abteilung.

Ketten-Brüche.

§ 67.

1) Ein Kettenbruch ist eine gemischte Zahl mit einem Bruche, dessen Nenner wieder eine gemischte Zahl, wobei der Nenner des zu ihr gehörenden Bruches ebenfalls wieder eine solche gemischte Zahl ist u. s. f. entweder bis der Nenner des letzten Bruches eine ganze Zahl ist, oder ohne Ende.

Ist jeder Zähler dieser Brüche 1, so heißt der Kettenbruch ein einfacher, und nur solche werden im Folgenden betrachtet werden.

Solche Brüche sind:

$$3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{9}}}}} \quad \text{oder } 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

2) Zunächst soll untersucht werden, wie ein beliebiger ächter gemeiner Bruch in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Es soll z. B. $\frac{212}{519}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden. Da der Zähler des Bruches 1 werden soll, ein Bruch aber seinem Werte nach ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert, so wird man Zähler und Nenner durch 212 dividieren und erhält dann:

$$\frac{212}{519} = \frac{212 : 212}{519 : 212} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{95}{212}}$$

In dem neuen Bruche $\frac{95}{212}$ soll der Zähler wieder 1 werden, man muß daher Zähler und Nenner durch 95 dividieren u. s. f. für jeden neuen Bruch; somit erhält man folgende Darstellung:

$$\frac{212}{519}=\frac{212:212}{519:212}=\frac{1}{2+\frac{95}{212}}=\frac{1}{2+\frac{95:95}{212:95}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{22}{95}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{22:22}{95:22}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{7}{22}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{7:7}{22:7}}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\frac{1}{7}}}}}$$ folglich ist $$\frac{212}{519}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\frac{1}{7}}}}}$$

3) Hat man einen unächten Bruch wie z. B. $\frac{316}{95}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so zieht man zuerst die Ganzen heraus und verfährt dann wie im vorigen Beispiele;

$$\frac{316}{95}=3+\frac{31}{95}=3+\frac{31:31}{95:31}=3+\cfrac{1}{3+\frac{2}{31}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\frac{2:2}{31:2}}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{15+\frac{1}{2}}}$$

mithin ist $$\frac{316}{95}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{15+\frac{1}{2}}}$$

Weil jeder Zähler 1 ist, somit alle Zähler bekannt sind, so handelt es sich bloß um das Auffinden der Nenner. Aus der obigen Darstellung geht hervor, daß man den ersten Nenner des Kettenbruches erhält, wenn man den gegebenen Nenner durch den gegebenen Zähler des ächten Bruches dividiert, den zweiten Nenner des Kettenbruches, wenn man den neuen Nenner durch den neuen Zähler dividiert u. s. f.; da nun jeder neue Zähler der Rest der vorhergegangenen Division, der neue Nenner aber der vorhergehende

Zähler ist, so stimmt das Aufsuchen dieser Nenner mit dem Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Divisors überein, und man erhält folgende Regel:

Um einen ächten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, dividiere man den Nenner durch den Zähler, durch den erhaltenen Rest den vorhergegangenen Divisor u. s. f. immer durch jeden folgenden Rest den vorhergegangenen Divisor; die dabei sich ergebenden Quotienten sind die Nenner des gesuchten Kettenbruches.

Ist der gegebene Bruch ein unächter, so ziehe man zuerst die Ganzen heraus.

Ist z. B. $\frac{91}{512}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \underline{5} & & \underline{1} & & \underline{1} & & \underline{1} & & \underline{2} & & \underline{11} & \\ 512 & : & 91 & : & 57 & : & 34 & : & 23 & : & 11 & : & 1 \\ 57 & & 34 & & 23 & & 11 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$ mithin

$$\frac{91}{512} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11}}}}}}$$

Hat man $\frac{417}{73}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so ist

$$\frac{417}{73} = 5 + \frac{52}{73}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \underline{1} & & \underline{2} & & \underline{2} & & \underline{10} & \\ 73 & : & 52 & : & 21 & : & 10 & : & 1 \\ 21 & & 10 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$ demnach ist

$$\frac{417}{73} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10}}}}$$

4) Zur Verwandlung der Kettenbrüche in gemeine Brüche dient folgende Betrachtung:

Ist nachstehender Kettenbruch gegeben:

$$3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}}}$$

so erhält man daraus, wenn man, mit den Ganzen anfangend, immer um einen Nenner weiter geht, nacheinander:

$$3;\ 3 + \frac{1}{4};\ 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}};\quad 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}};$$

$$3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}}}$$

Verwandelt man diese Ausdrücke in gemeine Brüche, so hat man:

I. $\frac{3}{1}$

II. $3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

III. $3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}} = 3 + \frac{5}{21} = \frac{68}{21}$

IV. $3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{16}} = 3 + \frac{16}{67} = \frac{217}{67}$

V. $3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{7}{22}}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{22}{117}}$

$$= 3 + \frac{117}{490} = \frac{1587}{490}.$$

Die Brüche $\frac{3}{1}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{68}{21}$, $\frac{217}{67}$ nähern sich dem Werte des

ganzen Kettenbruches $\frac{1587}{490}$; deshalb nennt man sie **Näherungswerte** des Kettenbruches.

Diese Näherungswerte nebst dem Werte des ganzen Kettenbruches $\frac{1587}{490}$, welchen man den **wahren** Wert des Kettenbruches nennt, lassen sich auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 3 \\ \frac{3}{1}; & \frac{13}{4}; & \frac{68}{21} = \frac{5 \times 13 + 3}{5 \times 4 + 1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 7 & \\ \frac{217}{67} = \frac{3 \times 68 + 13}{3 \times 21 + 4}; & \frac{1887}{490} = \frac{7 \times 217 + 68}{7 \times 67 + 21}. \end{array}$$

Aus dieser Darstellung folgt ein Gesetz, wodurch man die Näherungsbrüche, sowie den wahren Wert eines Kettenbruches finden kann:

Man schreibe die Nenner des Kettenbruches der Ordnung nach neben einander, setze unter den ersten die Ganzen in Form eines Bruches, dessen Nenner 1, unter den folgenden jenen Bruch, der aus den Ganzen und dem Bruche, dessen Zähler 1, dessen Nenner der erste Nenner des Kettenbruches ist, auf gewöhnliche Weise sich ergibt; dann wird jeder folgende Näherungswert erhalten, wenn man Zähler und Nenner des vorhergehenden Näherungswertes mit dem darüber stehenden Nenner des Kettenbruches multipliziert, und zu dem ersten Produkte den Zähler, zu dem andern den Nenner des vorhergehenden Näherungswertes addiert.

1. Anmerkung. Hat man einen ächten Bruch, so kommt unter den ersten Nenner, da keine Ganzen vorhanden sind, nach obiger Regel: $\frac{0}{1}$.

Z. B. $$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 4 \\ \frac{0}{1}; & \frac{1}{2}; & \frac{3 \times 1 + 0}{3 \times 2 + 1} = \frac{3}{7}; & \frac{5 \times 3 + 1}{5 \times 7 + 2} = \frac{16}{37}; \end{array}$$

$$\frac{4 \times 16 + 3}{4 \times 37 + 7} = \frac{67}{155}.$$

2. Anmerkung. Würde man dem ersten Näherungswerte [den Ganzen] die Formel $\frac{1}{0}$ vorschreiben, so könnte schon der zweite Näherungswert durch dasselbe Verfahren wie die übrigen gefunden werden.

5) Von jedem Kettenbruche

z. B. $$4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}$$

ist der erste Näherungswert ($\frac{4}{1}$) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches; denn der wahre Wert ist die Summe aus 4 und dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}$$

der zweite Näherungswert, welcher sich aus $4 + \frac{1}{5}$ ergibt, ist größer als der wahre Wert; denn zum wahren Wert gehört statt des Nenners 5 der Nenner

$$5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}$$

je kleiner aber der Nenner bei ungeändertem Zähler ist, desto größer ist der Wert des Bruches, also ist $4 + \frac{1}{5}$ größer als der wahre Wert. Ebenso findet man, daß der dritte Näherungswert wieder kleiner ist als der wahre Wert, der vierte größer ꝛc.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt, daß die Näherungswerte abwechselnd kleiner und größer sind als der wahre Wert des Kettenbruches, und zwar ist der erste Näherungswert zu klein, der zweite zu groß, der dritte zu klein u. s. f.; oder die Näherungswerte ungerader Ordnung (erster, dritter, fünfter ꝛc.) sind zu klein, die gerader Ordnung zu groß. Bei Kettenbrüchen ohne Ganze ist der erste Näherungswert $\frac{0}{1} = 0$.

z. B. in dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

sind von den Näherungswerten $0; \frac{1}{3}; \frac{7}{22}; \frac{64}{201}; \frac{327}{1027}; \frac{718}{2255};$ die Werte $0; \frac{7}{22}; \frac{327}{1027}$ kleiner und $\frac{1}{3}; \frac{64}{201}$ größer als der wahre Wert.

6) Wenn in dem Kettenbruche

$$4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}}}$$

welcher die Näherungswerte $\frac{4}{1}; \frac{21}{5}; \frac{46}{11}; \frac{159}{38}; \frac{205}{49}; \frac{1389}{332}$ hat, die Unterschiede von je zwei auf einander folgenden Näherungswerten aufgesucht werden, indem man immer den kleineren von dem größern subtrahiert, so erhält man

für II — I: $\frac{21}{5} - \frac{4}{1} = \frac{21 - 20}{1 \times 5} = \frac{1}{1 \times 5}$

„ II — III: $\frac{21}{5} - \frac{46}{11} = \frac{231 - 230}{5 \times 11} = \frac{1}{5 \times 11}$

„ IV — III: $\frac{159}{38} - \frac{46}{11} = \frac{1749 - 1748}{11 \times 38} = \frac{1}{11 \times 38}$

„ IV — V: $\frac{159}{38} - \frac{205}{49} = \frac{7791 - 7790}{38 \times 49} = \frac{1}{38 \times 49}$

„ VI — V: $\frac{1389}{332} - \frac{205}{49} = \frac{68061 - 68060}{49 \times 332} = \frac{1}{49 \times 332}$

Verfährt man ebenso mit dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

dessen Näherungswerte: $0;\ \frac{1}{3};\ \frac{7}{22};\ \frac{64}{201};\ \frac{327}{1027};\ \frac{717}{2225}$ sind, so erhält man:

$$\frac{1}{3}-\frac{0}{1}=\frac{1-0}{1+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{7}{22}=\frac{22-21}{3\times 22}=\frac{1}{3\times 22}$$

$$\frac{64}{201}-\frac{7}{22}=\frac{1408-1407}{22\times 201}=\frac{1}{22\times 201}$$

$$\frac{64}{201}-\frac{327}{1027}=\frac{65728-65727}{201\times 1027}=\frac{1}{201\times 1027}\text{ u. s. f.}$$

woraus man erkennt, daß der Unterschied zweier auf einander folgenden Näherungswerte stets jenem Bruche gleich ist, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner das Produkt der beiden Nenner ist.

7) Subtrahiert man von einem Bruche, welcher gekürzt werden kann, z. B. von $\frac{7}{14}$, ohne die Kürzung vorher auszuführen, irgend einen andern, etwa $\frac{5}{11}$, so muß, wenn die Nenner beider Brüche relativ prime Zahlen sind, der durch Ausführung der Subtraktion erhaltene Bruch ebenfalls durch 7 gekürzt werden können: denn es ist

$$\frac{7}{14}-\frac{5}{11}=\frac{7\times 11-5\times 14}{14\times 11}=\frac{7}{154}$$

7×11, 5×14 und 14×11 sind Vielfache von 7, mithin (wie aus § 28, 3 folgt) durch 7 teilbar, und ebenso die Differenz von zwei solchen Vielfachen, nämlich $7 \times 11 - 5 \times 14$ (§ 28, 2), also kann $\frac{7}{154}$ durch 7 gekürzt werden. Könnte man nun irgend einen Näherungswert eines Kettenbruches kürzen, so müßte man auch die Differenz zwischen diesem Näherungswerte und den folgenden oder vorausgehenden ebenfalls kürzen können; da aber diese Differenz stets einem Bruche gleich ist, dessen Zähler 1 ist,

so kann diese Differenz, mithin auch der Näherungswert nicht gekürzt werden; folglich sind die Näherungswerte nicht reduzierbar.

8) Sind $\frac{3}{7}$ und $\frac{16}{37}$ zwei auf einander folgende Näherungswerte, zwischen welchen (nach 4.) der wahre Wert des Kettenbruches liegen muß, so ist die Differenz der beiden Brüche $\frac{1}{7 \times 37}$.

Sucht man nun die Differenz zwischen $\frac{16}{37}$ und irgend einem anderen Bruche, dessen Nenner kleiner ist, als der des ersten, z. B. $\frac{2}{5}$, so ist die Differenz von $\frac{2}{5}$ und $\frac{16}{37}$ größer als die vorige Differenz; denn der Nenner der letzteren Differenz ist 5×37, also kleiner als 7×37, somit der Bruch größer, weil der vorige Bruch den kleinsten möglichen Zähler hat, nämlich 1; es liegt also $\frac{3}{7}$ dem wahren Werte näher als $\frac{2}{5}$ d. h. es kommen die Näherungswerte dem wahren Werte des Kettenbruches näher als jeder andere Bruch mit kleinerem oder gleichem Nenner.

Anmerkung. Die Näherungswerte für Kettenbrüche mit Ganzen können auch hergestellt werden, wenn man die Näherungswerte für den Kettenbruch ohne Ganze sucht und zu den erhaltenen Resultaten die Ganzen wieder hinzusetzt.

9) Die Kettenbrüche werden vorzüglich dazu benützt, Brüche mit großen Nennern und Zählern, welche man nicht vereinfachen kann, durch solche mit kleineren Zahlen möglichst genau darzustellen.

Z. B. a) Wenn der Durchmesser eines Kreises 1 ist, so ist der Umfang desselben, 3,1415926535 . . . .

$$3{,}1415926535 = 3\ \frac{1415926535}{10000000000}$$

	7	15	1	292	
10000000000 :	1415926535 :	88514255 :	88212710 :	301545....	
88514255	530783985	301545	2790371		
	88212710		764660		

$$3{,}1415926535 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + ..}}}}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 15 & 1 & 292 & \\ \frac{1}{0}; & \frac{3}{1}; & \frac{22}{7}; & \frac{333}{106}; & \frac{355}{113}; & \frac{103993}{33102}; \ldots \end{array}$$

b) Eine bayerische Meile mißt 7415, eine englische Seemeile 1851,85 Meter; es soll dieses Verhältnis möglichst nahe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden.

bayer. Meile : engl. S.-M. = 7415 : 1851,85.

$$\frac{7415}{1851,85} = \frac{148300}{37037} = 4\frac{152}{37037}$$

$$\begin{array}{lllllllllll} & & 243 & & 1 & & 1 & & 1 & & 50 \\ 37037 & : & 152 & : & 101 & : & 51 & : & 50 & : & 1 \\ 663 & & 51 & & 50 & & 1 & & & & \\ 557 & & & & & & & & & & \\ 101 & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\text{bayer. M. : engl. S.-M.} = 4 + \cfrac{1}{243 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{50}}}}}$$

$$\begin{array}{cccccc} 243 & 1 & 1 & 1 & 50 & \\ \frac{4}{1}; & \frac{973}{243}; & \frac{977}{244}; & \frac{1950}{487}; & \frac{2927}{731}; & \frac{148300}{37037}. \end{array}$$

Anhang
über die
Maße, Gewichte und Münzen
des
metrischen Systems.

1. Grundlage.

Die Grundlage des neuen Maßes und Gewichtes ist das Meter (μέτρον). Das Meter ist nahezu*) der vierzigmillionste Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridians.

Aus dem Meter sind alle übrigen Maße und Gewichte abgeleitet. Die Zahl 10 bildet die Reduktionszahl für die verschiedenen Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung dieses Längenmaßes und der von demselben abgeleiteten Flüssigkeitsmaße, sowie auch der Gewichte. Die Einheiten niedrigerer Ordnung erhalten ihre Benennung durch Vorsetzung der aus dem Lateinischen abgeleiteten Wörter Deci (decem, 10) Centi (centum, 100) Mille (mille, 1000), während die Einheiten höherer Ordnung aus dem Griechischen abgeleitete Wörter erhalten und zwar Deka (δέκα, 10), Hekto (ἑκατόν, 100), Kilo (χίλιοι, 1000), Miria (μυρίοι, 10000).

2. Das Längenmaß.

Das natürliche**) Meter ist gleich 443,295936 pariser Linien.

Der zehnte Teil des Meters (m) heißt Decimeter (dm), der hundertste Centimeter (cm), der tausendste Millimeter (mm). Das Zehnfache des Meters heißt Dekameter (Dm), das Hundertfache Hektometer (Hm), das Tausendfache Kilometer (km) und das Zehntausendfache Myriameter (Mm).

---

*) Genauer der 40003423. Teil.

**) Das gesetzliche = 443,296.

Hieraus ergibt sich folgende Übersicht:

km.	m.	cm.	mm.
1 =	1000 =	100000 =	1000000
	10 =	1000 =	10000
	1 =	100 =	1000
		1 =	10

3. Das Flächenmaß.

Die Einheit des Flächenmaßes ist das Quadratmeter, ein Quadrat, dessen Seite ein Meter lang ist. Quadratdecimeter, Quadratcentimeter, Quadratdekameter ꝛc. sind Quadrate, deren Seiten der Ordnung nach ein Decimeter, ein Centimeter, ein Dekameter ꝛc. lang sind.

Das Quadratdekameter heißt Ar (ἄρουρα, area), das Quadrathektometer Hektar.

Nach § 26, 1) ergibt sich bei diesem Flächenmaße für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung die Reduktionszahl 100, so daß man also hat:

Hektar (qHm.)	Ar (qDm.)	qm.	qcm.	qmm.
1 =	100 =	10000 =	100000000 =	10000000000
	1 =	100 =	1000000 =	100000000
		1 =	10000 =	1000000
			1 =	100

4. Das Körpermaß.

Die Einheit des Körpermaßes ist das Kubikmeter oder Ster (στερεόν), ein Würfel, dessen Kante ein Meter mißt. Kubikdecimeter, Kubikcentimeter ꝛc. sind Würfel, deren Kanten ein Decimeter, Centimeter ꝛc. lang sind.

Nach § 26, 4) ist bei diesem Körpermaße die Reduktionszahl für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung 1000, woraus sich ergibt:

cbm	ccm	cmm
1 =	1000000 =	1000000000
	1 =	1000

5. Das Hohlmaß für flüssige und trockene Gegenstände.

Als Einheit dient das Liter (λίτρα, l), dessen Inhalt ein Kubikdecimeter beträgt.

Die Reduktionszahl für Einheiten niedrigerer und höherer Ordnung ist, wie schon oben angegeben, 10. Daraus folgt die Uebersicht:

hl.		l.		dl.		cl.		ml.
1	=	100	=	1000	=	10000	=	100000
		1	=	10	=	100	=	1000
				1	=	10	=	100
						1	=	10

6. Das Gewicht.

Als Einheit des Gewichtes dient das Gramm (γραμμάριον). Es ist dies das Gewicht eines Kubikcentimeters destillierten Wassers, gewogen im luftleeren Raume und bei einer Temperatur von 4° des hundertteiligen Thermometers. 500 Gramm nennt man ein Pfund, 1000 Gramm ein Kilogramm, 50 Kilogramm oder 100 Pfund einen Zentner, 100 Kilogramm einen metrischen Zentner und 1000 Kilogramm oder 2000 Pfund eine Tonne. Die Uebersicht ist folgende:

kg.		g.		mg.
1	=	1000	=	1000000
		1	=	1000

7. Die Münzen.

Die Münzeinheit ist die Mark (ℳ) = ⅓ Thaler = 35 kr. süddeutsch. Sie wird in 100 Pfennige geteilt.

Verhältniszahlen.

1. Längenmaße.

1 m*) = 3,426309598′ bayr.; 1′ bayr. = 0,291859206 m;
1 dm = 4,111571517″ „ dd.; 1″ „ dd. = 2,43216005 cm;
1 cm = 4,933885820‴ „ dd.; 1‴ „ dd. = 2,02680004 mm;
1 m = 1,200458838 b. Ellen; 1 b. Elle = 0,833014817 m;
1 km = 0,26972443 b. Wegst.; 1 b. Wegst. = 3,7074874938 km;
1 „ = 0,134763 geogr. Meile; 1 g. Meile = 7,420438 „ ;
Nahezu sind: 7 Meter = 24′ bayer.; 5 Meter = 6 Ellen; 37 Kilometer = 10 Wegstunden.

*) natürliches Meter.

2. Flächenmaße.

1 qm	= 11,739597461	□′	bayer.;
1 qdm	= 16,9050202	□″	b. dd.;
1 qcm	= 24,343229	□‴	b. dd.;
1 Hektar	= 2,93489946	bayer.	Tagw.
1 □′ bayer.	= 0,085181796	qm;	
1 □″ b. dd.	= 5,91540251	qcm;	
1 □‴ b. dd.	= 4,107918	qmm;	
1 b. Tagw.	= 34,07271845	Ar.	

Nahezu sind 4 qm = 47 □′ bayer.; 34 Ar = 1 bayer. Tagwerk.

3. Körpermaße.

1 cbm	= 40,223495457 c′	bayer.;
1 cdm	= 69,506180149 c″	dd.;
1 cbm (Ster)	= 0,319234091	b. Holzklaft.;
1 c′ Fuß bayer.	= 0,024861091	cbm;
1 c″ Zoll dd.	= 14,38721014	ccm;
1 bayer. Holzklafter	= 3,13249751	cbm.

Nahezu sind: 4 Kubikmeter = 161 c′; 47 Kubikmeter = 15 b. Holzklft.; 25 Ster = 8 b. Holzklftr.

4. Getränkmaße.

1 l	= 0,9354301	bayer. Maßkannen;
1 hl	= 1,55905	Schenkeimer zu 60 b. Maßkan.;
	= 1,46161	b. Visireimer zu 64 b. Maßkan.;
1 b. Maßkanne	= 1,069027	l;
1 b. Schenkeimer	= 64,14162	l;
1 b. Visireimer	= 68,4177	l;

Nahezu sind: 31 Liter = 29 b. Maßkan.; 2 Hektolit. = 187 b. Maßk.

5. Getreidemaße.

1 hl = 0,4497259946 b. Schäffel; 1 b. Metzen = 37,0596027 l.
Nahezu sind: 1 Metzen = 37 Liter; 9 Schäffel = 20 Hektoliter.

6. Handelsgewicht.

1 kg = 1,785714286 Pfd. b. zu 560 g; 1 Pfd. b. = 1,12 Zollpfd.;
1 g = 0,22857143 bayer. Quintchen; 1 Loth = 17,5 g;
1 Zollpfund zu 500 g = 0,8928571429 Pfd. b.; 1 Qtch. = 4,375 g;
28 Zollpfund sind genau 25 bayer. Pfund.

7. Apothekergewicht.

1 kg = 2 Pfd. 9 Unz. 2 Drachm. 2 Skrupel; 1 Pfd. = 360 g
1 g = 16 Gran; 1 Gran = 0,0625 g
1 Pfd. = 12 Unzen; 1 Unze = 8 Drachmen; 1 Drachme = 3 Skrupel; 1 Skrupel = 20 Gran.

8. Silbergewicht.

1 kg = 3 Mark 9 Lot 2,28571 Pf.; 1 b. Mk. zu 16 Lth. = 280 g;
1 Lot zu 16 Pf. = 17,6 g;
1 g = 0,91429 Pf.; 1 Pf. = 1,09375 Gramm.

9. Goldgewicht.

1 kg = 307 Kronen 14,11891 Sechzehntel (Goldgew.);
1 g = 4,92612 Sechzehntel;
1 Krone (Goldgewicht) = 3,24799 Gramm;
1 kg = 286 Dukaten 8,02732 Sechzehntel (Goldgew.);
1 g = 4,58403 Sechzehntel.
1 Dukaten (Goldgewicht) = 3,49038 Gramm.
1 b. Mk. zu 24 Karat = 280 g; 1 Karat zu 12 Grän = 11,667 g.

10. Perlen- und Juwelengewicht.

1 g = 4,8569 holl. Juwelenkarat. 1 h. Juwelenk. = 20,5894 cg.

Berichtigungen.

Seite 61 Zeile 13 von unten statt „weßhalb“ lies „weshalb“.
„ 79 „ 6 „ „ „ „nothwendig“ lies „notwendig“.
„ 103 „ 4 „ „ „ „Verhältnißzahl“ lies „Verhältniszahl“.
„ 111 „ 3 „ „ „ „7“ lies „7+“.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.

Steck, F. X., **Sammlung von stereometrischen Aufgaben** in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Gymnasien und Realschulen. 8°. 1881. Preis 1 ℳ 70 ₰.

Steck und Bielmayr, **Sammlung von arithmetischen Aufgaben** in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Latein- und Realschulen. 8°. Achte Auflage (1885). Preis 1 ℳ 30 ₰. (Vom kgl. bayr. Kultus-Ministerium zur Einführung genehmigt.)

— — **Resultate** zur achten Auflage der arithmetischen Aufgaben-Sammlung. 8°. 45 ₰.

Stegmann, A., **Die Grundlehren der ebenen Geometrie.** Mit in in den Text gedruckten Figuren. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, besorgt von J. Lengauer, Studienlehrer für Mathematik am kgl. Ludwigsgymnasium in München. 8°. 1886. Preis 2 ℳ 25 ₰. (Vom kgl. bayr. Kultus-Ministerium zur Einführung genehmigt.)

Aufgaben zu Stegmann's Geometrie, 3. Auflage, von J. Lengauer. 8°. 1886.

— — **Die Grundlehren der Stereometrie.** Mit 265 Lehrsätzen und Aufgaben zur Uebung und 7 Figurentafeln. 8°. broch. Preis 1 ℳ 20 ₰. (Vom kgl. bayer. Kultusministerium zur Einführung genehmigt.)

— — **Die Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie.** 8°. 1881. Preis 1 ℳ 20 ₰. (Vom kgl. bayer. Kultusministerium zur Einführung genehmigt.)

Weishaupt, Dr., **Sammlung von französischen Wörtern und Redensarten mit Angabe der Abstammung,** oder **Vocabulaire étymologique,** sammt einem Anhange über das Geschlecht der französischen Hauptwörter. Für Gymnasien und Lateinschulen bearbeitet. 8°. Preis 1 ℳ 40 ₰.

Schlechte Witze, während 50 Jahren gesammelt vom alten Moselaner. Erste Dosis. Mit Titelillustr. 8°. Preis broch. 1 ℳ 50 ₰, gebd. 1 ℳ 80 ₰. — Zweite Dosis. Mit Titelillustr. 8°. Preis broch. 1 ℳ 50 ₰, gebd. 1 ℳ 80 ₰.

Verlag der B. Schmid'schen Verlagsbuchhandlung in Augsburg.

(Zu beziehen durch alle Buchhandlungen des In- und Auslandes.)

Schiele, K., **Praktische Aufgaben aus dem Gewerbsleben** zur Erlernung der einfachen Buchführung nebst Bemerkungen über Buchführung und Wechsel. 3. umgearbeitete Aufl. 8°. Preis 1 ℳ.

Staiger, B., **Landwirthschaftlicher Katechismus.** 6. Auflage. Mit 8 Holzschnitten. 8°. Preis 1 ℳ.

Stehele, Jos., **Anwendung der Rechnungskunst** auf die Landwirthschaft für Schulen und zum Selbstunterricht. Dritte, bedeutend vermehrte Aufl. 8°. Preis kart. 1 ℳ 50 ₰.

Buchdruckerei der Jos. Kösel'schen Buchhandlung in Kempten.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Steck, Franz Xaver

Lehrbuch der Arithmetik für Latein- und Realschulen

Kempten 1886

Math.p. 540 scf
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651750-4